

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID**

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR  
DE INGENIEROS NAVALES**

**UN MODELO MICROMECAÍNICO  
DE MATERIAL FISURABLE**

**TESIS DOCTORAL**

**JOSÉ LUIS VEGA MIGUEL**  
Ingeniero Naval

**1996**

**DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZAS BÁSICAS  
DE LA INGENIERÍA NAVAL**

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR  
DE INGENIEROS NAVALES**

**UN MODELO MICROMECAÍNICO  
DE MATERIAL FISURABLE**

Autor :

**JOSÉ LUIS VEGA MIGUEL**

Ingeniero Naval

Director :

**D. JUAN MIGUEL SÁNCHEZ SÁNCHEZ**

Dr. Ingeniero Naval

Profesor Titular de Universidad de la E.T.S.I. Navales de Madrid

**1996**

## **AGRADECIMIENTOS**

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento al Profesor D. Juan Miguel Sánchez, Director de esta Tesis Doctoral por su continuo apoyo y orientación y por animarme en el esfuerzo de trabajar lo mejor posible.

No puedo olvidar al primer Director de esta Tesis, Profesor D. Emilio Garbayo (q.e.p.d.), que supo ilusionarme en el estudio de estos temas y que con su valía intelectual, su estímulo y la amistad de que siempre me hizo gala, consiguió que esta tesis pudiera desarrollarse.

Al Profesor D. José María Amo Ortega, que tantas horas ha dedicado a la revisión de borradores, por sus inestimables consejos.

A María Asunción y Gonzalo por su paciencia y comprensión.

Para todos aquellos que contribuyeron de una manera u otra, a la finalización de la Tesis, van estas palabras de agradecimiento.

# ÍNDICE

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Modelos de material</b>	<b>2</b>
<b>1.2 Ecuaciones de conservación</b>	<b>4</b>
1.2.1 Ecuación de conservación de la masa	5
1.2.2 Ecuación de conservación del impulso	5
1.2.3 Ecuación de conservación del momento cinético	6
1.2.4 Ecuación de conservación de la energía	6
1.2.5 Ecuaciones de conservación en forma local	6
<b>1.3 Ecuaciones de comportamiento material</b>	<b>8</b>
<b>1.4 Objetivo de la Tesis</b>	<b>11</b>
<b>1.5 Medios para la realización de la Tesis</b>	<b>13</b>
 <b>2. OBJETIVIDAD DE ECUACIONES CONSTITUTIVAS</b>	 <b>15</b>
<b>2.1 Objetividad</b>	<b>16</b>
2.2 Cinemática de sólidos	18
<b>2.3 Campos tensoriales en una variedad diferenciable</b>	<b>21</b>
2.3.1 Espacio tangente	21
2.3.2 Aplicación tangente	22
2.3.3 “Avance” y “retroceso” de campos tensoriales	22
<b>2.4 Derivada de Lie de un campo tensorial</b>	<b>28</b>
<b>2.5 Objetividad de la derivada de Lie</b>	<b>34</b>
<b>2.6 Movimiento de una microfisura</b>	<b>35</b>
<b>2.7 Velocidad de variación de la normal a una microfisura</b>	<b>37</b>
<b>2.8 Convección del campo densidad de normales de microfisuras</b>	<b>39</b>

<b>2.9 Objetividad del ritmo temporal de la densidad de normales</b>	<b>41</b>
2.9.1 Derivada de Lie de un campo completamente antisimétrico	42
2.9.2 Derivada de Lie de un campo densidad tensorial	44
 <b>3. EVOLUCIÓN DE UNA POBLACIÓN DE FISURAS PARALELAS</b>	 <b>46</b>
<b>3.1 Materiales frágiles</b>	<b>47</b>
<b>3.2 Nucleación de microfisuras</b>	<b>49</b>
<b>3.3 Crecimiento de microfisuras</b>	<b>52</b>
3.4 Población de microfisuras paralelas	55
3.4.1 Poblaciones de fisuras de tamaño $R_f$ inferior a $R_w$	60
3.4.2 Poblaciones de fisuras de tamaño $R_f$ superior a $R_w$	62
<b>3.5 Evaluación de la función densidad de fisuras</b>	<b>64</b>
3.5.1 Distribuciones de máxima entropía	64
3.5.2 Aproximación mediante distribuciones de máxima entropía	67
3.5.3 Aproximación mediante polinomios de Chebyshev	69
3.5.4 Cálculo de los momentos de los polinomios de Chebyshev	71
<b>3.6 Volumen de microfisuras</b>	<b>73</b>
<b>3.7 Implementación computacional</b>	<b>74</b>
3.7.1 Integración temporal de las ecuaciones de movimiento	74
3.7.2 Cálculo de deformaciones	75
3.7.3 Leyes constitutivas del material sin fisurar	76
3.7.4 Leyes constitutivas del material fisurado	76
3.7.5 Evolución de la población de microfisuras	78
 <b>4. CONVECCIÓN DE UNA POBLACIÓN DE MICROFISURAS</b>	 <b>84</b>
<b>4.1. Introducción</b>	<b>85</b>
<b>4.2. Método de solución de la ecuación de evolución de microfisuras</b>	<b>86</b>
<b>4.3. Funciones armónicas esféricas</b>	<b>87</b>
<b>4.4. Aproximación de la función densidad de microfisuras mediante funciones armónicas esféricas</b>	<b>90</b>

<b>4.5. Aproximación de la distribución inicial de microfisuras</b>	<b>92</b>
<b>4.6. Implementación computacional</b>	<b>94</b>
4.6.1. Determinación de $\text{div } \vec{v}$ y $\text{grad } \vec{v}$	94
4.6.2. Cálculo de los términos $A_{i,j,m,k,n,l}$	99
4.6.3. Cálculo de las condiciones iniciales	100
4.6.4. Evolución de una población de microfisuras por convección	101
4.6.4.1. Coeficientes del sistema de ecuaciones diferenciales	101
4.6.4.2. Orden de discretización	101
4.6.4.3. Distribución inicial de microfisuras	103
4.6.4.4. Movimiento del sólido	104
4.6.4.5. Integración de las ecuaciones de evolución	105
4.6.4.6. Representación gráfica de resultados	108
4.6.4.7. Impresión de resultados	108
<b>4.7. Ejemplos numéricos</b>	<b>110</b>
4.7.1. Tracción	110
4.7.2. Cortante simple	113
4.7.3. Movimiento de sólido rígido	116
 <b>5. CONCLUSIONES</b>	 <b>118</b>
 <b>6. APÉNDICE 1. LISTADOS DE LOS PROGRAMAS DEL CAPÍTULO 3</b>	 <b>121</b>
6.1 Cálculo de la nucleación.	122
6.2 Cálculo del crecimiento de microfisuras.	124
6.3 Evaluación de la función densidad de microfisuras.	125
6.4 Cálculo de los momentos de los polinomios de Chebyshev	126
6.5 Cálculo de los coeficientes de los polinomios de Chebyshev.	129
 <b>7. APÉNDICE 2. CÁLCULO DE LA MATRIZ [A]</b>	 <b>133</b>

<b>8. APÉNDICE 3</b>	<b>139</b>
8.1 Cálculo de los coeficientes [A]	140
8.2 Distribución inicial de microfisuras.	144
8.3 Integración del sistema de ecuaciones diferenciales	147
8.4 Representación gráfica de resultados.	157
8.5 Rutinas auxiliares	159
<b>9. BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>161</b>

# 1. INTRODUCCIÓN

<b>1.1 Modelos de material</b>	<b>2</b>
<b>1.2 Ecuaciones de conservación</b>	<b>4</b>
1.2.1 Ecuación de conservación de la masa	5
1.2.2 Ecuación de conservación del impulso	5
1.2.3 Ecuación de conservación del momento cinético	6
1.2.4 Ecuación de conservación de la energía	6
1.2.5 Ecuaciones de conservación en forma local	6
<b>1.3 Ecuaciones de comportamiento material</b>	<b>8</b>
<b>1.4 Objetivo de la Tesis</b>	<b>11</b>
<b>1.5 Medios para la realización de la Tesis</b>	<b>13</b>



## **1.1 Modelos de material**

El campo objeto de esta tesis, es la simulación matemática del comportamiento de materiales y en particular el de materiales fisurables, frente a sollicitaciones estáticas o dinámicas.

Este área de conocimiento se empezó a desarrollar a principios del pasado siglo con los trabajos de Navier y de Cauchy en el campo de la Elasticidad. En 1821 Navier formuló las ecuaciones de la teoría de la elasticidad en tres dimensiones. Cauchy (1789-1851) desarrolló el concepto de tensión y deformación y su relación lineal que es conocida en nuestros días como ley de Hooke.<sup>1</sup> Anteriormente, hacia 1775, Euler estableció una ley de comportamiento para los fluidos perfectos afirmando que la fuerza ejercida por una parte del fluido sobre la parte adyacente es siempre perpendicular a la superficie de separación.

Durante la Segunda Guerra Mundial de unos 2000 barcos Liberty construidos, más de la mitad se rompieron en dos y muchos otros sufrieron grandes grietas. Este tipo de sucesos que se produjeron en otras áreas de la ingeniería como la aeronáutica y, posteriormente, en el campo nuclear, dieron nacimiento a la mecánica de la fractura cuyos orígenes científicos habría que buscarlos en los trabajos de Griffith (1920) [55].

La Mecánica de la Fractura trata la inestabilidad y crecimiento de una macrogrieta en función de los campos de deformación o tensión en la punta de la grieta. En nuestros días, esta es un área bien establecida y de corriente aplicación al diseño de estructuras y componentes, encontrándose amplia bibliografía, tanto desde el punto de vista teórico, como de aplicación práctica. (Véase por ejemplo, Parton y Morozov (1989) [100]; Broek (1989) [20]; Freund (1990) [41]; Sih y Liebowitz (1968) [121]; Sneddon y Lowengrub (1969) [127]; Cherepanov (1979) [31]).

En la mayoría de los casos, según se ha visto experimentalmente, las macrogrietas crecen por coalescencia (unión y fusión) de microdefectos en el extremo de las mismas y otras zonas con concentración de tensiones. Estas observaciones dieron lugar a un enfoque “micromecánico” de la mecánica de la fractura que es el que adoptaremos en esta tesis.

Recientemente, se han presentado modelos constitutivos de material, que abordan el deterioro de las características del material debido a los microdefectos. De este tipo de modelos de material, denominados modelos de daño, existen numerosas publicaciones. Los primeros modelos de este tipo fueron propuestos por Tuler y Buchter (1968) [134] y posteriormente por Wilkins (1977) [138]; Davison y Graham (1979) [34]; Kachanov (1987) [66] y [67]; y Horii y Nemat-Nasser (1983) [60] y (1988) [61].

---

<sup>1</sup>En 1660 Robert Hooke estableció para los cuerpos sólidos la proporcionalidad entre el alargamiento y la fuerza aplicada.

Los modelos más ambiciosos, tratan de describir la historia del material desde el material “intacto”, pasando por la degradación del mismo debido a la aparición y crecimiento de microdefectos y finalmente la rotura por coalescencia de las microcavidades y microfisuras. Entre ellos cabe mencionar los de Grady y Kipp (1985) [52] y de Curran, Seaman y Shockey (1987) [28] .

Estos modelos de material, se están incorporando a programas de ordenador para análisis mecánicos que emplean el método de los elementos finitos o, en menor medida, diferencias finitas.

Estos modelos no son en la actualidad de aplicación general en la ingeniería debido fundamentalmente a los siguientes aspectos:

- Imperfección de los mismos.
- Falta de caracterización de los parámetros de material necesarios para las ecuaciones constitutivas de los modelos de material.
- Alto coste computacional.

La simulación del comportamiento de materiales, se hace en base a unas ecuaciones matemáticas que básicamente respetan la hipótesis del continuo. Incluso en casos de materiales fisurables, como el que se va a tratar en esta tesis, se intenta apurar al máximo la hipótesis del continuo y sólo la abandonaremos cuando sea imprescindible.

Esta hipótesis se refleja matemáticamente en que hay un continuo en biyección difeomórfica con un abierto de  $E^3$  y en él hay definidos unos campos que en general son escalares, vectoriales o tensoriales, que describen el comportamiento del material. Ejemplo de estos campos son la densidad (campo escalar), la velocidad de los diferentes puntos materiales (campo vectorial) o tensorial como el campo de tensiones.

Tradicionalmente se separan las ecuaciones de conservación de las correspondientes al comportamiento del material, por ser independientes del comportamiento de material que se está simulando.<sup>2</sup>

Centrándonos en un sector que aún siendo específico es bastante representativo de lo que queremos tratar en esta tesis, vamos a considerar materiales donde no se producen reacciones químicas y además no consideraremos fenómenos de transmisión de calor aunque esta limitación no es esencial para las conclusiones finales.

---

<sup>2</sup>Este punto debe cualificarse en la simulación de materiales en los que se producen reacciones químicas, en los que hay considerar junto a la ecuación del conservación global de la masa, la ecuación de conservación de las especies químicas.

## 1.2 Ecuaciones de conservación

Las ecuaciones de conservación, en el campo que hemos delimitado en esta tesis, son las ecuaciones de conservación de la masa, de conservación del impulso (y por simetría, la conservación del momento cinético) y la conservación de la energía.

Esto significa que cada porción material del medio que estamos considerando cumple lo siguiente:

- Su masa constante (ley de conservación).
- La derivada del momento cinético es la resultante de las fuerzas aplicadas (ley de conservación del impulso).
- La potencia de las fuerzas aplicadas es la derivada de la energía total (ley de conservación de la energía).

La posición se puede expresar mediante una descripción espacial (conocida también como Euleriana) o mediante una descripción material o Lagrangiana. Según es habitual en la descripción Euleriana se usaran letras minúsculas para designar la posición mientras que en la descripción Lagrangiana emplearemos letras mayúsculas.

Ambas descripciones están ligadas por la relación,  $\vec{X} - \vec{x} = \vec{u}$  donde  $\vec{u}$  es el llamado vector desplazamiento que a su vez se puede representar en su descripción Euleriana o, más habitualmente, Lagrangiana. Estos conceptos se precisaran más en el capítulo siguiente.

La expresión matemática de estas leyes se incluirá seguidamente y aprovecharemos para introducir el significado de diversos símbolos de uso corriente.

Las siguientes ecuaciones se deben de verificar para toda parte  $P$  regular<sup>3</sup> contenida en el medio  $B$ ,

---

<sup>3</sup>Diremos que una parte es regular si le es aplicable el teorema de la divergencia de Gauss lo que sucede en esencia si la parte  $P$  pueda ser “descomponible en tetraedros curvilíneos coorientables”. Para una mayor precisión ver Apostol [8] pags. 557-560

### 1.2.1 Ecuación de conservación de la masa

La ecuación de conservación de la masa se expresa como,

$$\frac{d}{dt} \int_P \rho dV = 0 \quad (1)$$

donde,

$P$  representa cualquier volumen cuyas partículas acompañan al medio en su movimiento (denominado a veces volumen fluido) y,  
 $\rho = \rho(\vec{x}, t)$  es la densidad que es un campo escalar espacio-temporal.

### 1.2.2 Ecuación de conservación del impulso

La ecuación de conservación del impulso se expresa mediante,

$$\frac{d}{dt} \int_P \rho \vec{v} dV = \int_P \rho \vec{f} dV + \int_{\partial P} \vec{t} dA \quad (2)$$

donde,

$\vec{v}$  es el campo de velocidades de las partículas de  $P$ .  
 $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}, t)$  son las fuerzas exteriores, por unidad de masa, ejercidas sobre  $P$ .  
 $\vec{t}$  son las fuerzas exteriores por unidad de superficie<sup>4</sup>, que traducen las acciones locales de contacto

Para que la anterior relación sea cierta  $\vec{t}$  tiene que ser de la forma  $\vec{t} = \text{Contr}_{1,2}(\vec{n} \otimes \sigma)$  donde  $\sigma$  es el tensor de tensiones de Cauchy y  $\vec{n}$  es el vector normal a  $\partial P$ . Si se expresa esta fórmula en componentes, se obtiene:

$$t^i = \sum_{j=1}^3 \sigma^{ji} n_j \quad (3)$$

lo cual se demuestra por el clásico método del “tetraedro infinitesimal” (como se indica en cualquier libro de Elasticidad o Mecánica del Continuo, por ejemplo Fung (1965) [42] págs. 62-65).

El tensor  $\sigma$ , excepto en el caso de materiales polares<sup>5</sup>, es un tensor simétrico.

<sup>4</sup>Su aparición en la simulación vino propiciada por la “hipótesis de las acciones de contacto de Cauchy” que supone, que si aislamos una parte  $P$  del medio  $B$ , la acción ejercida por el resto del medio sobre dicha parte se debe sólo a fuerzas en la superficie.

<sup>5</sup>Este tipo de materiales, que como por ejemplo el cuarzo, involucran fenómenos piezoeléctricos bajo la influencia de un campo eléctrico no serán tratados en esta Tesis.

### 1.2.3 Ecuación de conservación del momento cinético

La ley de conservación del momento cinético se verifica siempre que se cumpla la ley de conservación de la cantidad de movimiento y el tensor de tensiones sea simétrico.

Su expresión viene dada por la ecuación,

$$\frac{d}{dt} \int_P \vec{r} \wedge \rho \vec{v} dV = \int_P \vec{r} \wedge \rho \vec{f} dV + \int_{\partial P} \vec{r} \wedge \vec{t} dA \quad (4)$$

### 1.2.4 Ecuación de conservación de la energía

La ley de conservación de la energía se expresa mediante,

$$\frac{d}{dt} \int_P (\rho E + \frac{1}{2} \rho v^2) dV = \int_P \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{\partial P} \vec{t} \cdot \vec{v} dA + \int_P \rho h dV - \int_{\partial P} \vec{q} \cdot \vec{n} dA \quad (5)$$

donde,

$E$  es la energía interna por unidad de masa  
 $h$  son las fuentes de calor por unidad de masa  
 $\vec{q}$  es el vector calor (positivo cuando se introduce en el sistema)

Para que estas leyes sean válidas es suficiente que sean ciertas para todo volumen esférico<sup>6</sup>

### 1.2.5 Ecuaciones de conservación en forma local

Las ecuaciones de conservación se han formulado en forma integral. A partir de estas ecuaciones en forma integral, denominadas ecuaciones globales por ser válidas para toda parte  $P$  regular, se puede deducir una formulación local.

El paso de la formulación integral a la local exige que los balances se verifiquen en una familia de partes abiertas en el dominio que es densa. Siendo las bolas abiertas base de la topología será suficiente.

Las ecuaciones de conservación en forma local en descripción Euleriana tienen la siguiente expresión,

---

<sup>6</sup>Su demostración se basa en la formulación local de estas ecuaciones que incluiremos más adelante.

Ley de conservación de masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (6)$$

Ley de conservación del impulso

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f} + \operatorname{div} \sigma \quad (7)$$

donde  $\frac{D\vec{v}}{Dt}$  es la aceleración (derivada material de la velocidad) la cual se precisará en el capítulo siguiente.

Ley de conservación de la energía

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \sigma : \nabla \vec{v} + \rho h - \operatorname{div} \vec{q} \quad (8)$$

donde  $\sigma : \nabla \vec{v}$  indica doble contracción tensorial  $\left( \sum_{i,j=1}^3 \sigma^{i,j} \nabla_i v_j \right)$

Suponemos conocidos los rudimentos de análisis tensorial que confieren sentido matemático a estas expresiones así como su enunciado en coordenadas curvilíneas cuando ello sea conveniente.

Estas ecuaciones locales son una consecuencia de la formulación global cuando los campos son de clase  $C^1$ . Cuando los campos son  $C^1$  por "secciones" o "trozos" y las secciones están separadas por superficies (móviles) donde hay discontinuidad la formulación global sigue siendo cierta, pero no la local que sólo es cierta en los trozos  $C^1$ . Ejemplo de discontinuidad son los casos de ondas de choque.

En las superficies de discontinuidad se tienen que cumplir las condiciones de "salto" que incluiremos seguidamente. La formulación local de las ecuaciones de conservación unida a las condiciones de "salto" en las superficies de discontinuidad implican la formulación global<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup>La demostración se hace mediante el teorema de Gauss y la fórmula del transporte.

### Condiciones de salto en las superficies de discontinuidad

A continuación vamos a incluir la condición de salto asociada a cada formulación local de las ecuaciones de conservación,

- Condición de salto asociada a la ecuación de conservación de masa

$$\rho(\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{n}|_+^+ = 0 \quad (9)$$

donde,

$\vec{n}$  es el vector normal a la superficie de discontinuidad.  
 $\vec{w}$  es la celeridad de dicha superficie.

- Condición de salto asociada a la ecuación de conservación del impulso

$$\rho\{(\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{n}\}\vec{v} - \text{Contr}_{1,2}(\vec{n} \otimes \sigma)|_+^+ = 0 \quad (10)$$

- Condición de salto asociada a la ecuación de conservación de la energía

$$(\rho E + \frac{1}{2} \rho v^2)(\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{n} - \vec{v} \otimes \vec{n} : \sigma|_+^+ = 0 \quad (11)$$

Esta última condición está expresada para el caso en que no interviene la transmisión de calor.

### **1.3 Ecuaciones de comportamiento material**

Las ecuaciones de conservación involucran ciertas funciones escalares, cuyo número es mayor que el de ecuaciones que las relacionan. Así la ecuación local de conservación de la masa, tiene como incógnitas la densidad  $\rho$  y las tres componentes de la velocidad  $\vec{v}$ . En la ecuación del impulso aparecen seis nuevas incógnitas que corresponden a las componentes del tensor, simétrico,  $\sigma$  si suponemos conocida  $\vec{f}$ . La ecuación de la energía, si suponemos dado  $h$ , introduce las incógnitas  $E$  (energía interna por unidad de masa) y el vector calor  $\vec{q}$ .

Para determinar todas las incógnitas, son necesarias ecuaciones adicionales a las de conservación, que se denominan ecuaciones del comportamiento del material o ecuaciones constitutivas.

Las ecuaciones de comportamiento son la parte del modelo que es menos universal y es completamente particular al comportamiento material que se quiere simular. Son unas ecuaciones obtenidas en laboratorio por medio de experimentos específicos y resultan desde el punto de vista científico mucho menos fiables que las ecuaciones de conservación. Las ecuaciones de conservación se han comprobado en dominios de la ciencia muy diversos,

desde la astronomía hasta la mecánica de diversos tipos y sistemas sobre la Tierra y por lo tanto tienen una gran fiabilidad.

Estas ecuaciones de comportamiento en sus formas más simples, relacionan cantidades dinámicas como tensiones o ritmos temporales de tensión con cantidades geométricas o cinemáticas como deformaciones o ritmos de deformación.

Una muestra de ecuación de comportamiento material es la ley de Hooke, que para la elasticidad lineal de pequeños desplazamientos, establece la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones.

Otro ejemplo, incluso más antiguo, es la ley de comportamiento de los fluidos perfectos, y que podemos expresar hoy día en un lenguaje más preciso que el empleado por Euler, diciendo que el tensor de tensiones es esférico (es decir no existen tensiones tangenciales) y por lo tanto es proporcional a la unidad, siendo su coeficiente de proporcionalidad, cambiado de signo, la presión. Cuando se trata de un medio fluido compresible se suele suponer que hay una relación entre la presión y la densidad y si se quiere una descripción termodinámica más completa, se establece una relación entre la energía específica, la presión y la densidad.

Posteriormente ha habido una eclosión de ecuaciones de comportamiento para materiales tan diversos como arcillas y suelos no saturados hasta la plasticidad de metales o el comportamiento de los materiales cerámicos.

Según lo dicho podría pensarse que las ecuaciones de comportamiento son meramente empíricas pero desde los trabajos de Truesdell [132], Noll [93] y Coleman [24] y también aunque con menor precisión los de Onsager [97] y Casimir [23] ha de prestarse fundamental atención a sus aspectos teóricos.

Posteriormente investigadores pertenecientes a la Escuela Francesa de Mecánica del Continuo como Mandel [82], Germain [43] y Maugin [20] aplicaron los anteriores trabajos a la formalización del estudio de las ecuaciones constitutivas.

La forma de las ecuaciones de comportamiento de material normalmente es un *a priori* del investigador, que introduce unos coeficientes desconocidos que posteriormente son determinados en el laboratorio.

Ahora bien esa forma de las ecuaciones de comportamiento material no puede ser cualquiera, sino que tiene que obedecer ciertas restricciones que, básicamente, son dos:

- Compatibilidad con el segundo principio de la termodinámica.
- Invariancia respecto al cambio de sistema de coordenadas (requisito de objetividad).



Siguiendo a Truesdell (1969) [132], podemos identificar el comportamiento de cada material con un operador funcional  $MB$ . Este operador transforma cualquier historia cinemática posible, en el material en una historia dinámica.

Más concretamente este operador constitutivo o material  $MB$  transforma cada par de funciones  $\vec{x} = x(\vec{X}, t)$  (que da la posición  $\vec{x}$  de cada punto material  $\vec{X}$  en cada instante  $t$ ) y  $\theta = \theta(\vec{X}, t)$  (que nos da la temperatura de dicho punto material para cada  $t$ ), a un cuarteto de funciones que nos proporcionan la evolución de:

1. la energía específica ( $\psi(\vec{X}, t)$ ),
2. la entropía específica ( $\eta(\vec{X}, t)$ ),
3. el tensor de tensiones de Cauchy ( $\sigma(\vec{X}, t)$ ), y
4. el flujo de calor ( $\vec{q}(\vec{X}, t)$ ).

No todo operador funcional  $MB$  es válido para representar el comportamiento de materiales, sino que debe de cumplir, como hemos mencionado anteriormente, condiciones de objetividad (a lo que dedicaremos gran parte de la tesis) y satisfacer el segundo principio de la termodinámica.

Expresaremos el segundo principio de la termodinámica de una forma apropiada a la mecánica de los medios continuos (Coleman [24]), mediante la desigualdad de Clausius-Duhem,

$$\frac{\partial \psi(\vec{X}, t)}{\partial t} + \eta \frac{\partial \theta(\vec{X}, t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} + \frac{1}{\rho \theta} \vec{q} \cdot \vec{\text{grad}} \theta \leq 0 \quad (12)$$

donde  $D$  es la matriz llamada velocidad de deformación que viene dada por,

$$D = \frac{1}{2} \left[ \text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T \right] \quad (13)$$

donde

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (14)$$

donde  $\Phi$  es la matriz jacobiana de la función de la posición que es conocida en Mecánica del Continuo como gradiente de deformación, habiendo sido mencionadas anteriormente el resto de las funciones y variables. En el capítulo siguiente definiremos el gradiente de deformación.

Al tenerse que verificar la desigualdad de Clausius-Duhem para la imagen (historias dinámicas) de cualquier historia cinemática  $\vec{x}, \vec{\theta}$  podemos extraer, mediante un análisis matemático a menudo complicado, información muy útil sobre las ecuaciones constitutivas de los materiales y por lo tanto del material en sí mismo.

### 1.4 Objetivo de la Tesis

El objetivo genérico de la tesis es la formulación de un modelo micromecánico de material fisurable, en tres dimensiones, y con comportamiento frágil, que tenga en cuenta las diferentes orientaciones de las fisuras y su evolución en el tiempo.

Hasta el presente, este tipo de materiales se estudian habitualmente mediante modelos fenomenológicos en los que el deterioro del material debido a las fisuras, se considera mediante las llamadas variables ocultas o internas<sup>8</sup> (Coleman (1967) [24]). Desde un punto de vista matemático este tipo de modelos se definen mediante cuatro funciones reales  $\hat{\psi}, \hat{\eta}, \hat{\tau}$  y  $\hat{q}$  que para cada tiempo  $t$  dependen de los valores en dicho instante de  $\Phi$ ,  $\theta$ ,  $\text{grad } \theta$  y el vector oculto  $\vec{\alpha}$ .

El operador material de dichos modelos de deterioro viene definido por la imagen de dichas funciones, que son las magnitudes dinámicas  $\psi, \eta, \tau$  y  $q$  mencionadas en el apartado anterior, junto a una ecuación de evolución del daño dada mediante una ecuación diferencial ordinaria del tipo,

$$\frac{\partial \vec{\alpha}(\vec{X}, t)}{\partial t} = \vec{h}(\Phi, \theta, \text{grad } \theta, \vec{\alpha}) \quad (15)$$

donde  $\vec{h}$  es otra función real.

Más recientemente se han introducido otro tipo de modelos, que denominaremos micromecánicos, en los que se aplican los métodos de la mecánica de la fractura a las microfisuras y microvacíos del material. Dado el gran número de microfisuras, el comportamiento macromecánico del material se obtiene como promedios estadísticos de las características de los microdefectos.

Un paradigma adecuado de los modelos micromecánicos podría ser BFRAC (Curran, Seaman y Shockey (1987) [28]), que es uno de los modelos más completos existentes aunque todavía tiene numerosas lagunas. Este modelo supone que todas las microfisuras se nuclean y crecen en planos paralelos a una sola dirección.

Esta dirección para cada elemento del modelo corresponde, por ejemplo, a la dirección de tensión máxima al comienzo de la nucleación y permanece “congelada” a lo largo de toda la evolución posterior del material. Esta hipótesis es justificable en fenómenos de crecimiento monótono de la tensión como en fenómenos de impacto. En la realidad, los microdefectos en cada instante se nuclean y crecen en diferentes orientaciones, porque el estado de tensiones en cada momento es dependiente de las cargas, variables con el tiempo, y la

<sup>8</sup>Se denominan variables ocultas porque sólo se ponen de manifiesto en procesos irreversibles. La deformación plástica en la teoría de la plasticidad es un ejemplo de variable interna.

historia anterior del material (plasticidad, ritmos de deformación, deterioro del material, etc.)

El estudio de la fisuración de materiales tiene gran interés en diversos campos tecnológicos, pero en particular en el campo naval, donde cada vez es más frecuente el empleo de aceros de muy alto límite elástico (aceros de alta resistencia).

En este tipo de aceros, el colapso de la estructura por rotura frágil, está cobrando importancia frente al tradicional agotamiento del material por plasticidad.

La descripción e implementación completa de un modelo de material fisurable con orientaciones cualesquiera de grietas, sería una tarea mucho más compleja que la realización de una tesis pues requeriría la labor de un equipo de investigación durante varios años. Por este motivo vamos a centrar los objetivos de la tesis en su aspecto fundamental que es el estudio de la población de microfisuras, tratando las materias periféricas al modelo, como por ejemplo el comportamiento en tensiones, deformaciones y sus ritmos de evolución, que son comunes a otros modelos de material, como temas colaterales.

En esta tesis fijaremos las siguientes etapas:

- Formulación de las leyes de evolución de fisuras de una manera objetiva.
- Aproximación de las mismas desde un punto de vista de análisis numérico, teniendo en cuenta la potencia de las herramientas de cálculo disponibles.
- Implementación de las ecuaciones aproximadas en unas rutinas de cálculo.
- Prueba de las anteriores rutinas de cálculo en casos simplificados pero suficientemente representativos.

La formulación de las leyes de evolución de las fisuras, se realizará inicialmente para un caso particular en que no se considera ni nucleación ni crecimiento de las mismas, sólo convección con el material. Se hará especial incidencia en la demostración de la objetividad de la formulación mediante las derivadas de Lie importadas de la geometría.

Posteriormente, se tratará la nucleación y crecimiento de las microgrietas, teniendo en cuenta el estado tensional del material.

En esta tesis se ponen bases teóricas y computacionales para mejorar substancialmente una de las principales limitaciones del modelo clásico BFRACT, al permitir pasar de una población de fisuras con una sola orientación, (constante durante el tiempo aunque distinta para cada elemento de la discretización), a tener en un mismo punto una distribución de fisuras en todas las direcciones que además evoluciona con la historia del material.

Una vez expuesta extensamente la formulación del modelo, a lo que dedicaremos la mayor parte de la tesis, se desarrollaran unos ejemplos numéricos no con el fin de implementar en ordenador el modelo completo, sino con el objetivo de mostrar que en la práctica este modelo es computable.

Para su aplicación a códigos de cálculo numérico, la población de microfisuras se representará mediante distribuciones estadísticas con las que se pueda modelizar adecuadamente la nucleación, el crecimiento y su distribución espacial.

Para que el estudio de la evolución temporal de las poblaciones de microfisuras sea viable computacionalmente, sus distribuciones estadísticas se aproximarán por funciones más económicas, como polinomios de Legendre, funciones trigonométricas, funciones armónicas esféricas, etc. (Abramowitz y Stegun (1964) [4]).

La bondad de estas aproximaciones se basará en la teoría de los momentos, imponiendo que las distribuciones teóricas y sus aproximaciones tengan los mismos momentos hasta un determinado orden.

Las rutinas a desarrollar se realizarán en el lenguaje FORTRAN y estarán preparadas para su incorporación a un modelo de material de un código de cálculo por elementos finitos explícito como DYNA (Hallsquist (1988) [56]) o implícito como NIKE ( Engleman (1991), [38]).

Es de prever que en un futuro próximo desaparezcan los motivos enumerados al principio de este capítulo y este tipo de materiales con presencia de fisuras sean incorporados a las herramientas de diseño usadas habitualmente por los ingenieros.

A ello contribuirán las siguientes razones:

- Aparición de modelos más completos (a lo que pretende contribuir esta tesis) que se calibrarán y validarán mediante ensayos.
- La evolución de la potencia de cálculo de los ordenadores y su continuo abaratamiento.

### ***1.5 Medios para la realización de la Tesis***

La realización de la Tesis, ha sido implementada para su mayor difusión, con medios de cálculo basados en un ordenador tipo PC y compiladores de FORTRAN, así como bibliotecas de rutinas numéricas, gráficas y programas de cálculo de elementos finitos como DYNA-2D [57], DYNA-3D [58], NIKE-2D [38] y NIKE-3D [80].

Los programas de cálculo desarrollados en esta Tesis han sido preparados para una configuración básica del tipo :

- CPU Intel 486 a 66 MHz.
- 8 Megabytes de memoria RAM
- Unidades de disco flexible de 3 1/2 y 5 1/4.
- 600 Megabytes de espacio en disco duro.
- Tarjeta gráfica VGA y monitor en color
- Impresora láser

El empleo de mejores medios informáticos no afectaría a los resultados obtenidos y aunque se incrementaría la velocidad de cálculo, en los casos incluidos en esta Tesis no sería significativo.

Al haberse realizado los desarrollos de software en lenguaje FORTRAN standard, su portabilidad a equipos más potentes para una posible aplicación posterior como modelo de material en programas de cálculo de propósito general, será inmediata.

## **2. OBJETIVIDAD DE ECUACIONES CONSTITUTIVAS**

<b>2.1 Objetividad</b>	<b>16</b>
<b>2.2 Cinemática de sólidos</b>	<b>18</b>
<b>2.3 Campos tensoriales en una variedad diferenciable</b>	<b>21</b>
2.3.1 Espacio tangente	21
2.3.2 Aplicación tangente	22
2.3.3 “Avance” y “retroceso” de campos tensoriales	22
<b>2.4 Derivada de Lie de un campo tensorial</b>	<b>28</b>
<b>2.5 Objetividad de la derivada de Lie</b>	<b>34</b>
<b>2.6 Movimiento de una microfisura</b>	<b>35</b>
<b>2.7 Velocidad de variación de la normal a una microfisura</b>	<b>37</b>
<b>2.8 Convección del campo densidad de normales de microfisuras</b>	<b>39</b>
<b>2.9 Objetividad del ritmo temporal de la densidad de normales</b>	<b>41</b>
2.9.1 Derivada de Lie de un campo completamente antisimétrico	42
2.9.2 Derivada de Lie de un campo densidad tensorial	44

## 2.1 Objetividad

Objetividad significa independencia del fenómeno en estudio de los ejes de referencia del laboratorio. De una manera genérica, que precisaremos posteriormente, diremos que un modelo de material es objetivo, si sus ecuaciones constitutivas son invariantes respecto al observador. Ahora bien, esta independencia hay que cualificarla con un lenguaje más preciso como es el lenguaje matemático.

¿Qué características exigimos a los observadores?, ¿consideramos observadores fijos o móviles?, ¿qué tipo de movimientos vamos a permitir a los observadores?.

El principio de la relatividad en la mecánica de Galileo, establece que la ecuación fuerza igual a masa por aceleración se verifica en un sistema de ejes fijos y en todos los sistemas de referencia que se muevan con movimiento rectilíneo y uniforme respecto a ellos. En los libros de mecánica antiguos, este sistema de ejes fijos se expresaba diciendo que era un triedro con origen en el centro de gravedad del Sol y ejes en direcciones de las estrellas fijas. Estos ejes donde son ciertas las leyes de la gravitación los denominamos sistemas inerciales.<sup>1</sup>

Desde un punto de vista puramente matemático, la ecuación  $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$  es invariante en sistemas de referencia inerciales, porque al ser el movimiento de los mismos uniforme, la aceleración, derivada segunda del desplazamiento, es la misma en todos ellos.

En Mecánica Clásica, cuando tenemos un sistema no inercial, las ecuaciones se plantean como si fuese inercial, introduciendo unas fuerzas adicionales que llamamos fuerzas de inercia (fuerza centrífuga, aceleración de Coriolis, etc.).

La objetividad o invarianza de las ecuaciones constitutivas no tiene nada que ver con los sistemas inerciales, la objetividad se tiene que producir respecto a observadores cualesquiera sean inerciales o no. Si un observador no es inercial, el único efecto que hay en Mecánica del Continuo es que las fuerzas exteriores de masa cambian porque hay que considerar las fuerzas de inercia, lo cual afecta a las ecuaciones de conservación pero no a las ecuaciones constitutivas. El comportamiento constitutivo del material no tiene nada que ver con esto, el comportamiento material es un operador funcional (véase página 9) que transforma historias cinemáticas en historias dinámicas.

---

<sup>1</sup>Después, Maxwell formaliza las leyes del electromagnetismo de Faraday y postula que entre todos los sistemas inerciales hay uno privilegiado donde son válidas las ecuaciones del electromagnetismo lo cual condujo, a finales del siglo pasado, a numerosos experimentos para tratar de demostrar la existencia del “éter”. Posteriormente, la transformación de Lorentz entre sistemas inerciales establece la invarianza de las ecuaciones de Maxwell para cualquier velocidad. Las ecuaciones de Galileo para velocidades bajas siguen siendo ciertas con la transformación de Lorentz mientras que para velocidades próximas a la velocidad de la luz habría que entrar en la teoría de la Mecánica Relativista. En esta tesis vamos a ceñirnos a la Mecánica Clásica.

Hemos visto que la objetividad tiene que verificarse para todo observador  $\mathbf{O}(t)$  cualquiera que sea su movimiento, ahora bien, ¿es un sólo observador el que evalúa todos los puntos del continuo o cada punto material del mismo es seguido por un observador distinto?

Este último caso de invarianza frente a difeomorfismos<sup>2</sup> es empleado por algunos investigadores, especialmente en los estudios de plasticidad de grandes deformaciones, pero está sujeto a controversia dentro de la comunidad científica (véase por ejemplo, Simo (1988) [122] y Naghdi (1990) [90]).

Desde un punto de vista físico, parece más razonable pedir únicamente objetividad frente a observadores globales que matemáticamente expresamos como invarianza frente a isometrías.<sup>3</sup>

Desde un punto de vista general, las condiciones de objetividad fueron enunciadas por Noll y se encuentran descritas en un artículo que resume su tesis doctoral (Noll, (1955) [93], págs. 25-35) pero no existe una formulación matemática universal de la objetividad.

Por esta razón, es parte de la investigación establecer razonadamente qué tipo de objetividad considerar en el modelo de material en estudio.

La objetividad del comportamiento del material depende de sus ecuaciones constitutivas, que en un caso genérico pueden relacionar no sólo tensiones y deformaciones (y sus ritmos de variación) sino variables internas como la deformación plástica o el deterioro y deben ser estudiadas para cada modelo de material.

El análisis tensorial opera con entes y propiedades que son intrínsecas es decir, independientes del sistema de referencia elegido y por lo tanto constituye una herramienta fundamental para el estudio de la objetividad.

Por ejemplo, para un modelo de material elástico, lineal e isotrópico la ecuación constitutiva se formula mediante la siguiente relación entre tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  y deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{div} \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{G} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son las llamadas constantes de Lamé<sup>4</sup> y  $\mathbf{G}$  es el tensor métrico.

Esta ecuación constitutiva, al ser una relación tensorial, es válida en cualquier sistema de ejes y por lo tanto lleva implícita la objetividad.

<sup>2</sup>Difeomorfismo es un  $C^\infty$ -homeomorfismo entre abiertos de espacios de Banach cuya inversa es también  $C^\infty$ .

<sup>3</sup>Se denominan isometrías porque los movimientos rígidos no modifican el tensor métrico.

<sup>4</sup> $\lambda$  y  $\mu$  se pueden expresar en función de los módulos de Young ( $E$ ) y de Poisson ( $\nu$ ) mediante las relaciones  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  y  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$



Si en la formulación de la ecuación constitutiva aparecen, por ejemplo, ritmos de deformación u otras derivadas temporales de  $\varepsilon$  garantizar la objetividad no es inmediato y suele requerir un trabajo creativo muy de detalle.

Este tipo de ecuaciones constitutivas son frecuentes en los llamados modelos incrementales, muy empleados en los códigos de ordenador, donde en vez del tensor de tensiones en sí mismo, se relacionan los incrementos del tensor de tensiones (o una derivada temporal adecuada) con deformaciones o tasas de deformación.

Las siguientes observaciones nos harán ver las dificultades que se plantean al estudiar la objetividad de las ecuaciones constitutivas:

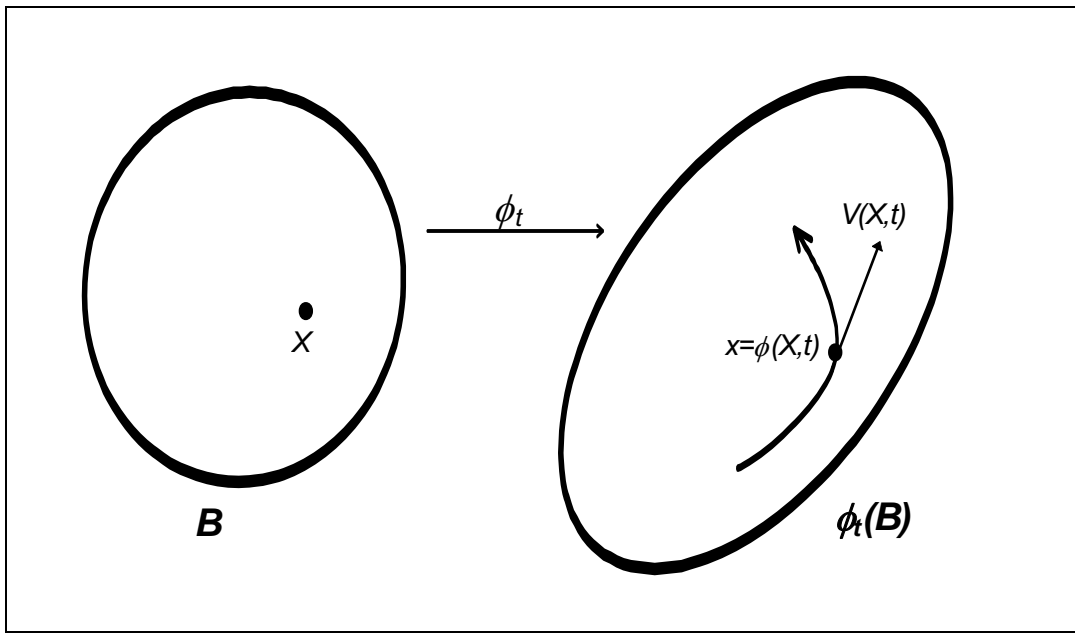
1. La derivada temporal material o local de un tensor no es necesariamente un tensor, por ejemplo,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{S}(t + \Delta t) - \mathbf{S}(t)}{\Delta t}$  es un tensor cuando las configuraciones en los instantes  $t$  y  $t + \Delta t$  están expresadas en mismo sistema de referencia (**O1**) fijo o cambia de un sistema fijo **O1** a otro sistema fijo **O2**, pero no es un tensor cuando los observadores **O1** y **O2** están en movimiento.
2. Incluso la derivada material de un campo vectorial fijo sobre un sólido con movimiento rígido no es cero. Aunque parezca trivial este sencillo ejemplo dado por Germain (Germain (1973) [43]) nos muestra que la información de que ese campo vectorial está “congelado”, que es un dato importante, no se refleja en la derivada material que es, en general, distinta de cero.

El ente matemático que nos va a permitir resolver las dificultades anteriormente planteadas es la derivada de Lie.

Aunque la derivada de Lie es común en los libros de Geometría Diferencial, en Mecánica del Continuo nos convendrá una forma ligeramente modificada de ella que trataremos extensivamente en este capítulo.

## 2.2 Cinemática de sólidos

Este apartado trata de la representación de sólidos, su movimiento y sus configuraciones. Limitaremos esta exposición a los conceptos y notación matemática estrictamente necesarios en apartados posteriores. Como referencia sobre la Cinemática del Continuo citamos los libros de Malvern (1969) [81] y Fung (1965) [42] y en especial el libro de Marsden (1983) [83] por su formalismo matemático.



**Figura 2-1** Sólidos y configuraciones.

### Sólidos y configuraciones

Llamaremos sólido a un abierto  $B \subset R^3$

Una configuración del cuerpo sólido  $B$  es una aplicación  $\phi: B \rightarrow R^3$  y representa un estado deformado de  $B$  (véase Figura 2-1).

Si denominamos  $C(B)$  al conjunto de todas las configuraciones de  $B$  podemos definir el movimiento de un sólido  $B$  como una aplicación que a cada instante  $t \in U \subset R$  le asigna una configuración de  $C(B)$  que representamos como  $\phi_t(B)$ .

Los puntos de  $B$  los identificamos por sus coordenadas en la configuración inicial y los representamos con letras mayúsculas  $X, Y, \dots$

Para un tiempo  $t$  fijo mediante la aplicación  $\phi_t(X) = \phi(X, t)$  obtenemos la configuración de  $B$  en ese instante  $t$ . Análogamente para un punto  $X \in B$  fijo  $\phi_X(t) = \phi(X, t)$  nos da la posición espacial del punto material  $X$  en cada instante  $t$ . Indicamos con letras minúsculas  $x, y, \dots$  a la posición de los puntos  $X, Y, \dots \in B$  en configuración distinta de la de referencia, o sea,  $x = \phi_t(X)$ ,  $y = \phi_t(Y)$ , ....

Por extensión, en un movimiento también usaremos letras mayúsculas para designar a las coordenadas espaciales y campos vectoriales (o en general tensoriales) definidos en la configuración de partida, aunque no sea la

configuración inicial  $B$ , reservando las letras minúsculas para las mismas magnitudes en la configuración final.

Diremos que un movimiento  $\phi_t$  es regular cuando,  $\phi_t(B)$  es un abierto y  $\phi_t$  tiene una función inversa  $\phi_t^{-1}: \phi_t(B) \rightarrow B$ . El movimiento  $\phi_t$  es  $C^r$  regular cuando  $\phi_t$  es un  $C^r$ -difeomorfismo.<sup>5</sup>

Desde un punto de vista físico que un movimiento sea regular quiere decir que no hay desgarramiento o penetración de materia.<sup>6</sup>

En lo sucesivo consideraremos movimientos  $\phi_t$  regulares con la clase de continuidad necesaria para que las ecuaciones tengan sentido.

### Velocidad material

Definimos velocidad material como la aplicación,  $\mathbf{V}_t: B \rightarrow R^3$  definida como,

$$\mathbf{V}_t(X) = \mathbf{V}(X, t) = \frac{\partial \phi(X, t)}{\partial t} = \frac{d\phi_X(t)}{dt} \quad (2)$$

### Velocidad espacial

Definimos la velocidad espacial como la aplicación,  $\mathbf{v}_t: \phi_t(B) \rightarrow R^3$  tal que,

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{V}_t \circ \phi_t^{-1} \quad (3)$$

### Derivada material

Sea  $g_t: \phi_t(B) \rightarrow R$  una función de al menos clase  $C^1$ .

Llamamos derivada local de  $g(X, t)$  a la variación con el tiempo de la magnitud  $g$  para cada punto concreto del espacio y la representamos por  $\frac{\partial g}{\partial t}$

La derivada material calcula la variación de la función  $g$  siguiendo cada punto en su movimiento arrastrado por el medio. Su expresión viene dada por

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} \quad (4)$$

<sup>5</sup>  $\phi_t$  es un  $C^r$ -difeomorfismo cuando es continua y tiene derivadas continuas de  $X$  y  $t$  hasta orden  $r$  y además  $\phi_t^{-1}$  es  $C^r$ .

<sup>6</sup> En fenómenos de contacto sin penetración tal como hemos definido  $\phi_t$  el movimiento es regular pero  $\phi_t$  no se puede extender con regularidad a la frontera de  $B$ .

o en forma compacta por,

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \text{grad } g \cdot \mathbf{v}_t \quad (5)$$

donde  $\mathbf{v}$  es el campo de velocidad espacial del movimiento. Al término  $\text{grad } g \cdot \mathbf{v}_t$  se le denomina derivada covariante de  $g$  según  $\mathbf{v}_t$

### 2.3 Campos tensoriales en una variedad diferenciable

A continuación vamos a desarrollar los conceptos matemáticos necesarios para la posterior definición de la derivada de Lie.

#### 2.3.1 Espacio tangente

Llamamos espacio tangente de  $B$  en un punto  $X \in B$  al espacio vectorial  $R^3$  con origen en  $X$  y lo representamos por  $T_X B$ . Sus elementos son pares ordenados  $(X, \mathbf{W})$  donde  $X \in B$  y  $\mathbf{W}$  es un vector de  $R^3$ , y lo representaremos de una manera abreviada por  $\mathbf{W}_X$ .<sup>7</sup>

Llamamos fibrado tangente de  $B$  al conjunto  $\bigcup_{X \in B} T_X B$ , y le denotamos  $TB$  y que podemos identificar a  $B \times R^3$ . Cada espacio tangente  $T_X B$  de esa unión es una fibra. El punto  $X$  se llama base de la fibra.  $TB$  tiene la estructura de una variedad topológica de dimensión seis.

Sea  $\{X^A\}$  un sistema de coordenadas<sup>8,9</sup> de  $B$ . Llamaremos sistema de coordenadas inducido en  $TB$  al definido por la aplicación de  $TB$  en  $R^6$  que asocia a  $\mathbf{W}_X = (X, \mathbf{W})$  la sexteta  $(X^A(X), W^A)$  donde  $W^A$  son las componentes de  $\mathbf{W}$  en la base  $\mathbf{E}_A$  asociada al sistema de coordenadas  $\{X^A\}$ .<sup>10</sup> Si denotamos

<sup>7</sup>Las operaciones que estructuran  $T_X B$  en  $R$  espacio vectorial son la suma  $(X, \mathbf{V}) + (X, \mathbf{W}) = (X, \mathbf{V} + \mathbf{W})$  y el producto por un número real  $\lambda(X, \mathbf{V}) = (X, \lambda \mathbf{V})$

<sup>8</sup>En un planteamiento más general, se podría considerar un sistema de coordenadas diferentes para cada punto de  $B$  que nos permitiría considerar la objetividad frente a observadores distintos para cada punto material.

<sup>9</sup>Con el fin de simplificar la notación, adoptamos en lo sucesivo el habitual convenio de suma en los índices que aparecen repetidos una vez en posición superior y otra en posición inferior.

<sup>10</sup> $E_A = \frac{\partial}{\partial X^A}$  es una imagen por la diferencial de la inversa de la aplicación que define el sistema de

coordenadas  $\{X^A\}$  de la base  $\mathbf{e}_I$  asociada al sistema de coordenadas euclídeas de  $R^3$   $E_A = \frac{\partial Z_I}{\partial X^A} \mathbf{e}_I$ .

$E_A = dX^A$  es la base dual de la anterior en  $T_X^* B$  y claro es  $E_A = dX^A = \frac{\partial X^A}{\partial Z^I} dZ^I$  donde  $(dZ^I)$

$W_z^I$  las componentes de  $\mathbf{W}$  en la base  $\mathbf{e}_I$  del sistema de coordenadas euclídeas  $\{Z^I\}$  elegido en el espacio ambiente  $R^3$  tendremos,

$$W^A = \left( \frac{\partial X^A}{\partial Z^I} \right) W_z^I \quad (6)$$

### 2.3.2 Aplicación tangente

Sea  $\phi: B \rightarrow S \subset R^3$  una aplicación de clase  $C^1$  al menos. Llamamos aplicación tangente de  $\phi$ , y la representamos por  $T\phi$ , a la aplicación  $T\phi: TB \rightarrow TS$  donde cada par  $(X, \mathbf{W}) \in TB$  se transforma en el par  $T\phi(X, \mathbf{W}) = (\phi(X), D\phi(X) \cdot \mathbf{W}) \in TS$  donde  $D\phi(X)$  es el Jacobiano de la transformación.

Si  $\{X^A\}$  es un sistema de coordenadas en  $B$  y  $\{x^a\}$  un sistema en  $S$ , para  $\mathbf{W} \in T_X B$ ,

$$(D\phi(X) \cdot \mathbf{W})^a = \frac{\partial \phi^a}{\partial X^A} W^A \quad (7)$$

lo cual puede deducirse fácilmente expresando  $D\phi(X) \cdot \mathbf{W}$  en el sistema  $\{Z^I\}$  y aplicando la regla de la cadena (Marsden (1983) [83], pág. 39)

### 2.3.3 “Avance” y “retroceso” <sup>11</sup> de campos tensoriales

Llamaremos tensor, de orden contravariante  $p$  y orden covariante  $q$ , en un punto  $X \in B$  a la forma  $(p+q)$  lineal  $H$

$$H: T_X^* B \times \dots (p \text{ veces}) \dots \times T_X^* B \times T_X B \times \dots (q \text{ veces}) \dots \times T_X B \rightarrow R \quad (8)$$

donde las componentes de  $H$  en  $L_{p+q} \left( (T_X^* B)^p \times (T_X B)^q \right)$  respecto de la base deducida de las bases  $\mathbf{E}_A$  y  $\mathbf{E}^A$  de  $T_X B$  y  $T_X^* B$  asociadas al sistema de coordenadas  $\{X^A\}$  son :

$$H^{A_1 A_2 \dots A_p}_{B_1 B_2 \dots B_q} = H(\mathbf{E}^{A_1}, \mathbf{E}^{A_2}, \dots, \mathbf{E}^{A_p}, \mathbf{E}_{B_1}, \mathbf{E}_{B_2}, \dots, \mathbf{E}_{B_q}) \quad (9)$$

es la base dual de la canónica  $(\mathbf{e}_I)$  en  $R^3$ . Al efectuar el cambio de coordenadas en  $B$ , la relación entre las bases asociadas viene dada por las fórmulas siguientes:

$$E_A = \frac{\partial}{\partial X^A} = \frac{\partial \bar{X}^C}{\partial X^A} \frac{\partial}{\partial \bar{X}^C} = \frac{\partial \bar{X}^C}{\partial X^A} \bar{E}_C \quad ; \quad E_A = dX^A = \frac{\partial X^A}{\partial \bar{X}^C} d\bar{X}^C = \frac{\partial X^A}{\partial \bar{X}^C} \bar{E}^C$$

<sup>11</sup>Traducimos la denominación inglesa de “push-forward” y “pull-back” por “avance” y “retroceso”, respectivamente.

y por lo tanto,

$$\mathbf{H}(\alpha^1, \dots, \alpha^p, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q) = H^{A_1 \dots A_p}_{B_1 \dots B_q} \alpha^1_{A_1} \dots \alpha^p_{A_p} v^{B_1}_1 \dots v^{B_q}_q \quad (10)$$

donde,

$$\alpha^i \in T_X^* B, \quad \alpha^i = \alpha^i_A \mathbf{E}^A, \quad \mathbf{v}_j \in T_X B, \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_j = v^A_j \mathbf{E}_A \quad (11)$$

Al cambiar de un sistema de coordenadas  $\{X^A\}$  a otro  $\{\bar{X}^A\}$  las componentes del tensor se transforman de acuerdo a la ley,

$$H^{A_1 \dots A_p}_{B_1 \dots B_q} = \frac{\partial \bar{X}^{A_1}}{\partial X^{C_1}} \dots \frac{\partial \bar{X}^{A_p}}{\partial X^{C_p}} H^{C_1 \dots C_p}_{D_1 \dots D_q} \frac{\partial X^{D_1}}{\partial \bar{X}^{B_1}} \dots \frac{\partial X^{D_q}}{\partial \bar{X}^{B_q}} \quad (12)$$

Un campo tensorial de orden  $\binom{p}{q}$  sobre  $B$  asigna a cada punto  $X \in B$  un tensor  $\mathbf{H}(X)$  de orden  $\binom{p}{q}$  cuyas componentes son funciones del punto.

El concepto de “avance” y “retroceso” de campos tensoriales mediante un flujo o movimiento, es fundamental para la definición de la derivada de Lie. Con el fin de introducir este concepto sistemáticamente, vamos, previamente a definir el “avance” de un vector así como el “avance” y “retroceso” de campos de vectores y campos de formas lineales.

#### Avance de un vector

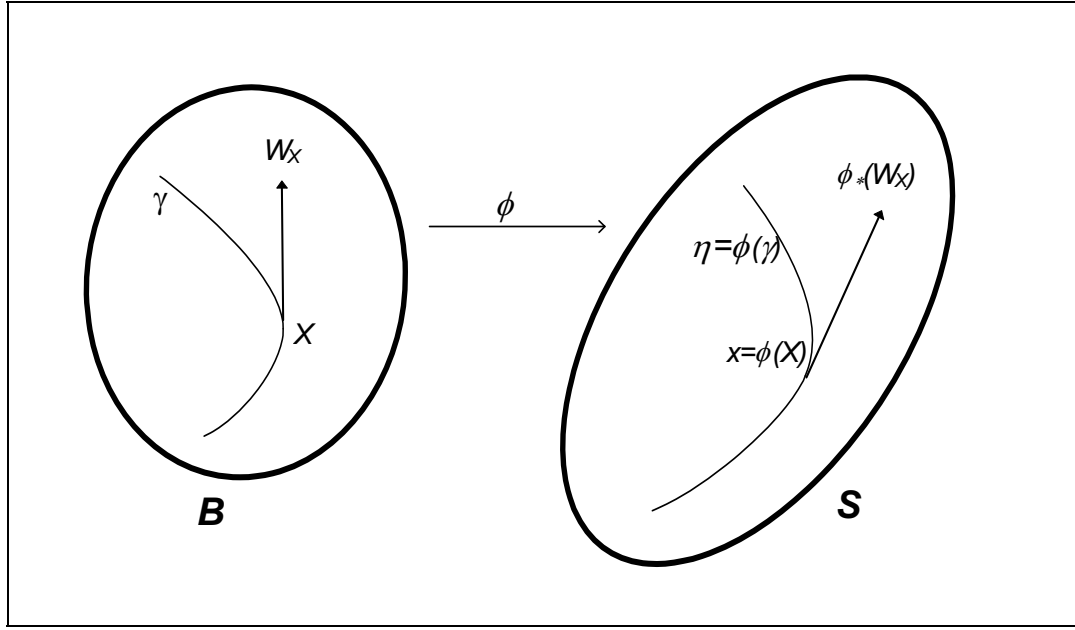
Sea  $\phi: B \rightarrow S \subset R^3$ . Llamamos “avance” del vector  $\mathbf{W}_X = (X, \mathbf{W})$  por el flujo  $\phi$  al vector  $T\phi \circ \mathbf{W}_X$  y se suele representar por  $\phi_* \mathbf{W}_X$ .

Si  $\{X^A\}$  y  $\{x^a\}$  son sistemas de coordenadas de  $B$  y  $S$  respectivamente y  $\mathbf{W}_X \in T_X B$ , donde  $T_X B$  es el espacio tangente de  $B$  en  $X$ , la expresión en componentes de  $\phi_* \mathbf{W}_X$  viene dada por

$$(\phi_* \mathbf{W}_X)^a = (T\phi \cdot \mathbf{W}_X)^a = \frac{\partial \phi^a}{\partial X^A} W^A \quad (13)$$

es decir, la matriz  $\frac{\partial \phi^a}{\partial X^A}$  es la matriz Jacobiana de  $\phi$  calculada en  $X$ .

En Mecánica del Continuo esta matriz es conocida como gradiente de deformación y la representaremos por  $\Phi$ .



**Figura 2-2** Avance de un vector

Sea  $\gamma(t)$  una curva  $C^1$  en  $B$  tal que, por ejemplo para  $t=0$ , pasa por el punto  $X \in B$ , es decir  $X = \gamma(0)$ , y comparte tangencia y orientación con un vector  $W_X$  (véase Figura 2-2), o sea, si denotamos

$$\left. \frac{d\gamma(t)}{dt} \right|_{t=0} = \gamma'(0) \quad (14)$$

$$W_X = (X, W) = (X, \gamma'(0)) \quad (15)$$

Si  $\eta(t)$  es la curva imagen por  $\phi$  de  $\gamma(t)$ , es decir  $\eta(t) = \phi(\gamma(t))$ , se verifica,

$$\eta'(0) = \left. \frac{d\eta(t)}{dt} \right|_{t=0} = D\phi(X) \left. \frac{d\gamma(t)}{dt} \right|_{t=0} = D\phi(X)(\gamma'(0)) \quad (16)$$

de donde,

$$(\eta'(0))_{\phi(X)} = T\phi(\gamma'(0))_X \quad (17)$$

### Avance de un campo vectorial

Consideremos un campo vectorial  $V$  en  $B$  y sea  $\phi: B \rightarrow S$ , llamaremos “avance” de  $V$  por el flujo  $\phi$  al campo vectorial  $v \equiv \phi_* V$  definido en  $\phi(B) \subset S$  mediante,

$$\phi_* \mathbf{V} = T\phi \circ \mathbf{V} \circ \phi^{-1} \quad (18)$$

que expresado en componentes,

$$v^a(x) = (\phi_* \mathbf{V}(X))^a_{x=\phi(X)} = \frac{\partial \phi^a}{\partial X^A}(X) \cdot V^A(X) \quad (19)$$

o de una manera resumida como

$$\mathbf{v} \equiv \phi_* \mathbf{V} = \Phi \mathbf{V} \quad (20)$$

donde se entiende que  $\Phi$  y  $\mathbf{V}$  actúan sobre puntos  $X \in B$  y el valor de  $\mathbf{v}$  se supone en los puntos  $x$  imagen por  $\phi$  de  $X$ .<sup>12</sup>

### Retroceso de un campo vectorial

Si  $\mathbf{v}$  es un campo vectorial en  $\phi(B)$  y  $\phi$  es regular llamaremos “retroceso” de  $\mathbf{v}$ , y lo expresamos por  $\phi^* \mathbf{v}$ , al campo vectorial  $\mathbf{V}$  sobre  $B$  construido por “avance” de  $\mathbf{v}$  mediante la aplicación inversa  $\phi^{-1}$  es decir,

$$\mathbf{V} = \phi^* \mathbf{v} = T(\phi^{-1}) \circ \mathbf{v} \circ \phi \quad (21)$$

Abreviadamente,

$$\mathbf{V} \equiv \phi^* \mathbf{v} = \Phi^{-1} \mathbf{v} \quad (22)$$

A continuación definiremos el comportamiento de las formas lineales mediante los operadores “avance” y “retroceso”.

### Retroceso de un campo de formas lineales

El espacio  $T^*_X B$  dual de  $T_X B$  se llama el espacio contangente a  $B$  en el punto  $X$ , es el espacio de las formas lineales en  $T_X B$  (también denominados vectores covariantes).

Se construye el fibrado cotangente  $T^*B$  uniendo los espacios cotangentes a  $B$  en cada uno de sus puntos  $X$ ,

$$T^*B = \bigcup_{X \in B} T^*_X B \quad (23)$$

Un campo de formas lineales (o de vectores covariantes) en  $B$  es una aplicación  $\alpha$  de  $B$  en  $T^*B$  que asocia a cada punto  $X$  de  $B$  una forma lineal  $\alpha_X$  de la fibra  $T^*_X B$  de base  $X$ .

<sup>12</sup>Lo cual hace formalmente incorrecta la relación; preferimos, hecha la salvedad, utilizar este tipo de fórmulas en aras de la sencillez.



Sea  $\phi: B \rightarrow S \subset R^3$  y sea  $\alpha$  un campo de formas lineales en  $S$ . Llamaremos “retroceso” de  $\alpha$  mediante el flujo  $\phi$  a un campo de formas lineales en  $B$  que denominamos  $\phi^*\alpha$  que asocia al punto  $X$  de  $B$  la forma lineal  $(\phi^*\alpha)_X$  de  $T_X^*B$  que al aplicarla sobre  $\mathbf{W}_X \in T_X B$  da,

$$(\phi^*\alpha)_X \cdot \mathbf{W}_X = \alpha_x \cdot (T\phi \cdot \mathbf{W}_X) \quad (24)$$

con  $x = \phi(X)$ .

o de una manera compacta,

$$\phi^*\alpha = (\alpha \circ \phi) \circ \Phi \quad (25)$$

que, con la misma salvedad indicada en el caso de campos vectoriales. podemos representar nemotécnicamente por

$$\phi^*\alpha = \alpha\Phi \quad (26)$$

Nótese que para definir el retroceso de un campo de formas lineales no se requiere que  $\phi$  sea regular.

#### Avance de un campo de formas lineales

Si  $\phi$  es regular definimos el “avance” de una forma lineal  $\alpha$  en  $B$  mediante

$$\phi_*\alpha = (\phi^{-1})^*\alpha \quad (27)$$

que abreviadamente expresaremos por la relación

$$\phi_*\alpha = \alpha\Phi^{-1} \quad (28)$$

#### Avance de un campo tensorial

Sea  $\phi: B \rightarrow S$  regular ( $\phi$  es un homeomorfismo de  $B$  sobre  $\phi(B)$ ).

Se construye el fibrado tensorial  $\otimes_q^p TB$  mediante la unión disjunta de las fibras  $\otimes_q^p T_X B$  de base  $X$

$$\otimes_q^p TB = \bigcup_{X \in B} (\otimes_q^p T_X B) \quad (29)$$

donde

$$\otimes_q^p T_X B = T_X B \otimes \cdots (p \text{ veces}) \cdots \otimes T_X B \otimes T_X^* B \otimes \cdots (q \text{ veces}) \cdots \otimes T_X^* B \quad (30)$$

Se trata de una  $3+3^{p+q}$  - variedad topológica, el sistema de coordenadas en ese fibrado asociado al  $\{X^A\}$  de  $B$  viene definido por las tres coordenadas  $X^A$  que fijan  $X$  en  $B$  y las  $3^{p+q}$  componentes  $\left\{H^{A_1 \dots A_p}_{B_1 \dots B_q}\right\}$  del tensor de la fibra  $\otimes_q^p T_X B$  respecto de la base deducida de la  $E^A$  asociada al sistema de coordenadas  $\{X^A\}$ .

Sea  $H$  un campo tensorial en  $B$ , aplicación de  $B$  en  $\otimes_q^p TB$  tal que  $H(X) \in \otimes_q^p T_X B$ . Llamaremos “avance” del campo tensorial  $H$  mediante el flujo  $\phi$ , o abreviadamente “avance” de  $H$ , al campo tensorial sobre  $\phi(B)$ , que denominaremos  $\phi_* H$ , definido de la siguiente manera,

$$(\phi_* H)(x)(\alpha^1, \dots, \alpha^p, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q) = H(X)(\phi^*(\alpha^1), \dots, \phi^*(\alpha^p), \phi^*(\mathbf{v}_1), \dots, \phi^*(\mathbf{v}_q)) \quad (31)$$

donde  $\phi(X) = x$ .

Con las fórmulas de transformación por “retroceso” de vectores y formas lineales obtenemos la siguiente relación del “avance” de un campo tensorial en componentes,

$$(\phi_* H)^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}(x) = \Phi_{A_1}^{a_1}(X) \dots \Phi_{A_p}^{a_p}(X) \cdot H^{A_1 \dots A_p}_{B_1 \dots B_q} \cdot (\Phi^{-1})_{b_1}^{B_1}(x) \dots (\Phi^{-1})_{b_q}^{B_q}(x) \quad (32)$$

donde

$$x = \phi(X), \quad \Phi_A^a(X) = \frac{\partial \phi^a}{\partial X^A}(X) \quad y \quad (\Phi^{-1})_a^A(x) = \frac{\partial (\phi^{-1})^A}{\partial x^a}(x) \quad (33)$$

### Retroceso de un campo tensorial

Definimos el “retroceso” de un campo tensorial  $h(x)$ , definido sobre  $S$ , como el campo tensorial  $\phi^* h(X)$  sobre  $B$  obtenido por “avance” mediante el flujo inverso, es decir,

$$\phi^* h = (\phi^{-1})_* h \quad (34)$$

Su expresión en componentes viene dada por la siguiente relación,

$$(\phi^* h)^{A_1 \dots A_p}_{B_1 \dots B_q}(X) = (\Phi^{-1})_{a_1}^{A_1}(x) \dots (\Phi^{-1})_{a_p}^{A_p}(x) \cdot h^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}(x) \cdot \Phi_{B_1}^{b_1}(X) \dots \Phi_{B_q}^{b_q}(X) \quad (35)$$

## 2.4 Derivada de Lie de un campo tensorial

El concepto de derivada de Lie tiene su origen en el campo de las Variedades Diferenciales donde podemos citar los libros de Bishop y Goldberg (1980) [16] y Abraham, Marsden y Tudors (1988) [2].

Para la definición de la derivada de Lie, lo único que se necesita es un campo tensorial en la variedad y un flujo, es decir, que la variedad se vaya deformando con el tiempo en otras variedades imagen.

Antes de entrar en un análisis matemático más detallado, anticipamos que cuando las ecuaciones constitutivas involucran los tensores  $\sigma$  y  $\varepsilon$  y sus derivadas temporales, o sea modelos con memoria del instante anterior, las derivadas de Lie de campos tensoriales variables con el tiempo constituyen una herramienta indispensable para garantizar su objetividad.

El empleo de las derivadas de Lie en Mecánica del Continuo se debe a que constituyen un método de construir ritmos objetivos con los que formular las ecuaciones constitutivas. Ahora bien, la elección en un modelo de material del ritmo temporal concreto, es responsabilidad del investigador.

Como referencias sobre la derivada de Lie aplicada a la Mecánica del Continuo citaremos el libro de Marsden (Marsden, (1983) [83]) y los artículos de Simo y Pister (1984) [125], Simo y Ortiz (1985) [124], Simo (1988) [122] y Pinsky (1983) [102].

En la derivada de Lie de la Geometría Diferencial clásica, el flujo considerado corresponde a lo que en Mecánica de Fluidos denominamos movimiento estacionario. En este tipo de movimiento, las líneas de corriente se confunden con las trayectorias y entonces la variedad se superpone a sí misma continuamente. La derivada de Lie respecto a un movimiento estacionario se denomina derivada de Lie autónoma.

En Mecánica del Continuo es necesario considerar un movimiento más general y la derivada de Lie definida en este tipo de flujos no estacionarios, aparentemente, se asemeja muy poco a la derivada de Lie clásica.

Aunque la derivada de Lie se define en espacios más generales, como en el desarrollo de esta Tesis estamos considerando al cuerpo sólido como un subconjunto abierto del espacio  $R^3$ , con el fin de no recargar la exposición, únicamente usaremos la terminología específica de Variedades Diferenciales cuando conceptualmente sea necesario.

Sean  $\phi_s(B)$  y  $\phi_t(B)$  las configuraciones de  $B$  correspondientes a los instantes  $s$  y  $t$ .

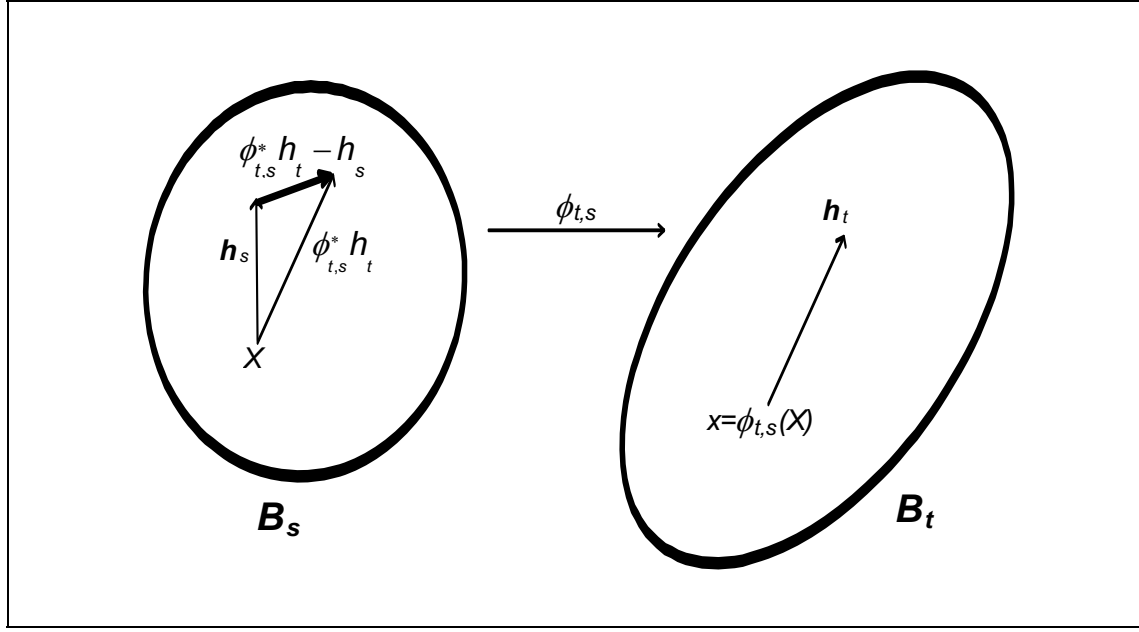


Figura 2-3 Derivada de Lie.

Definimos el flujo que transforma la configuración  $\phi_s(B)$  en la configuración  $\phi_t(B)$  mediante la composición de flujos  $\phi_{t,s} = \phi_t \circ \phi_s^{-1}$  (véase Figura 2-4), es decir,

$$\phi_{t,s}: \phi_s(B) \rightarrow \phi_t(B) \quad (36)$$

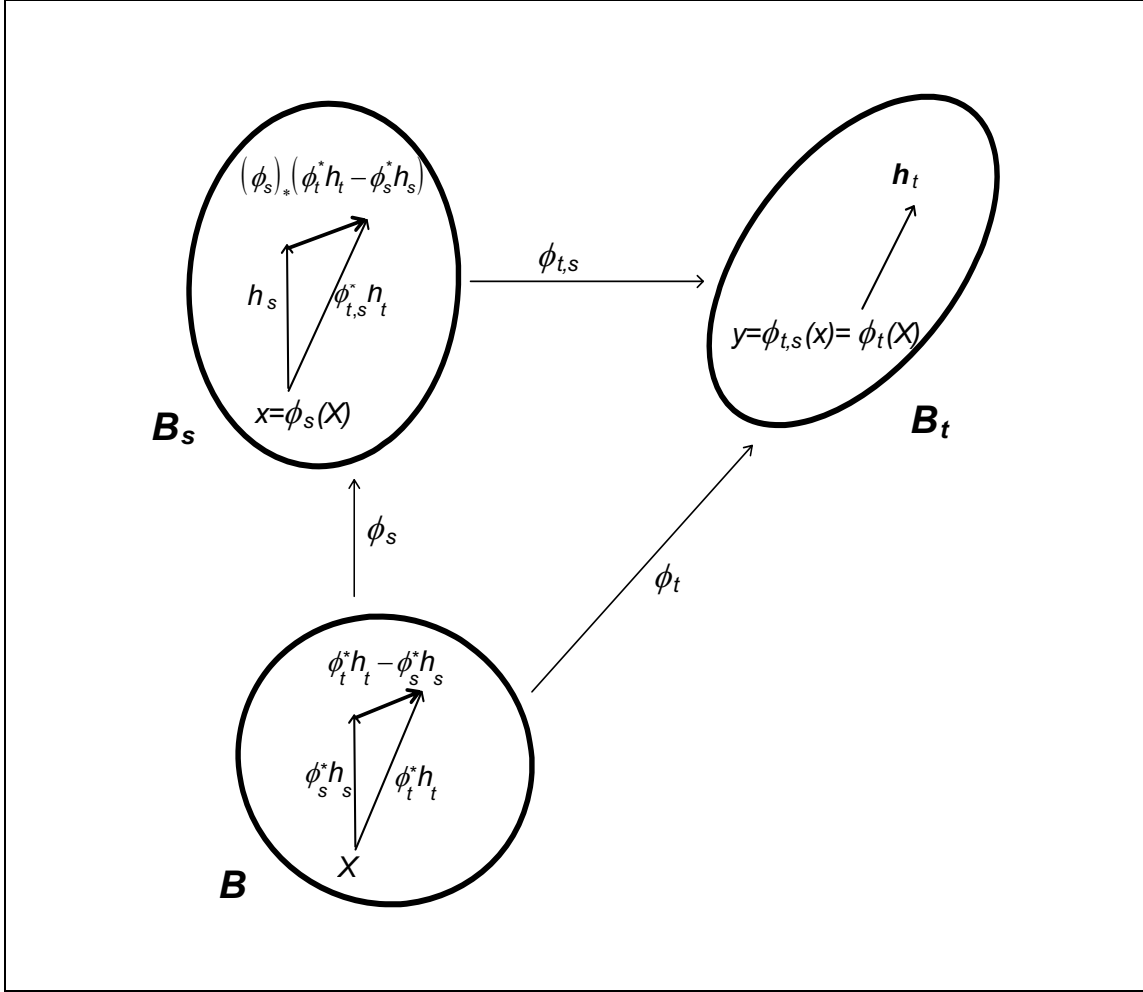
La derivada de Lie según un flujo  $\phi_{t,s}$  es un operador que transforma cada campo tensorial continuo  $\mathbf{h}$ , dependiente del tiempo, en otro campo tensorial con las mismas varianzas.

A este nuevo campo tensorial le denominaremos la derivada de Lie de  $\mathbf{h}$  según  $\phi$  y lo representamos por  $\mathbf{L}_\phi \mathbf{h}$

La derivada de Lie de un campo tensorial, en el instante  $s$ , se define como.

$$\mathbf{L}_\phi \mathbf{h} \Big|_{t=s} \equiv \frac{\partial (\phi_{t,s}^* \mathbf{h}_t)}{\partial t} \Big|_{t=s} \quad (37)$$

donde



**Figura 2-4** Derivada de Lie. Definición alternativa.

$$\left. \frac{\partial (\phi_{t,s}^* h_t)}{\partial t} \right|_{t=s} = \lim_{t \rightarrow s} \frac{\phi_{t,s}^* h_t - h_s}{t - s} \quad (38)$$

Es decir el numerador del límite es la diferencia entre el valor del campo  $h$  “retrocedido” mediante el flujo  $\phi_{t,s}$  y el valor del propio campo tensorial  $h$  en la configuración  $\phi_s(B)=B_s$ , (véase Figura 2-3).

Si suponemos que la variación del campo tensorial es únicamente debida a la inducida por el movimiento, sin considerar el cambio temporal del campo, obtenemos una derivada de Lie restringida. Esta derivada, denominada derivada de Lie autónoma, es la que habitualmente se encuentra en los libros de Geometría Diferencial. Su expresión viene dada por,

$$\mathcal{L}_\phi \mathbf{h} \Big|_{t=s} = \frac{\partial \left( \phi_{t,s}^* \mathbf{h}_s \right)}{\partial t} \Big|_{t=s} \quad (39)$$

Es decir ,

$$\mathbf{L}_\phi \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \mathcal{L}_\phi \mathbf{h} \quad (40)$$

Una definición alternativa de la derivada de Lie, que normalmente es más apropiada en Mecánica del Continuo, viene dada por la siguiente igualdad (véase Figura 2-4),

$$\mathbf{L}_\phi \mathbf{h} \Big|_{t=s} = \phi_{s*} \left( \frac{\partial \left( \phi_t^* \mathbf{h}_t \right)}{\partial t} \right) \Big|_{t=s} = \phi_{s*} \left( \lim_{t \rightarrow s} \frac{\phi_t^* \mathbf{h}_t - \phi_s^* \mathbf{h}_s}{t - s} \right) \quad (41)$$

Sea  $\vec{w}: S \times I \longrightarrow TS$  un campo vectorial en  $S$ , variedad diferenciable, variable con el parámetro  $t \in I$  ( $I$  intervalo abierto de  $R$ ). Se denomina flujo de  $\vec{w}$  a la colección de aplicaciones  $\psi_{t,s}$  tales que para cada  $s$  y  $x$  fijos,  $t \longrightarrow \psi_{t,s}(x)$  es una curva integral de  $\vec{w}$ , es decir,

$$\frac{\partial \psi_{t,s}(x)}{\partial t} = \vec{w}(\psi_{t,s}(x), t) \quad (42)$$

y  $\psi_{s,s}(x) = x$ .

Por ejemplo, sea  $\vec{v}_t$  el campo de vectores velocidad espacial de un flujo  $\phi_t: B \longrightarrow \phi_t(B)$ , o sea,  $\vec{v}_t: \phi_t(B) \longrightarrow TS$ .  $\phi_{t,s} = \phi_t \circ \phi_s^{-1}: \phi_s(B) \longrightarrow \phi_t(B)$  cumple:

$$\frac{\partial \phi_{t,s}(x)}{\partial t} = \frac{\partial \phi_t(\phi_s^{-1}(x))}{\partial t} = \frac{\partial \phi_t(X)}{\partial t} = \frac{\partial \phi_X}{\partial t} \quad (43)$$

que es igual a

$$\vec{v}(\phi_{t,s}(x), t) = \vec{v}(\phi_t(x), t) = \vec{v}(\phi_X(t), t) \quad (44)$$

de acuerdo con lo anterior probado y la notación usada, luego

$$\frac{\partial \phi_{t,s}(x)}{\partial t} = \vec{v}(\phi_{t,s}(x), t) \quad (45)$$

y  $\phi_{s,s}(x) = x$  de donde la colección  $\phi_{t,s}$  es el flujo de  $\vec{v}$ .

Por lo anteriormente expuesto a menudo se representa la derivada de Lie de un campo tensorial respecto un flujo  $\phi_{t,s}$  por  $L_{\vec{v}} \mathbf{h}$  donde  $\vec{v}$  es el campo vectorial “tangente al flujo”, es decir,  $\vec{v} \equiv \frac{\partial \phi_{t,s}}{\partial t}$

La expresión general en coordenadas de la derivada de Lie de un tensor  $\mathbf{h}$  (véase Marsden (1983) [83] pág. 97) viene dada por,

$$\begin{aligned} (L_{\vec{v}} \mathbf{h})_{d,e,\dots,f}^{a,b,\dots,c} = & \frac{\partial h_{d,e,\dots,f}^{a,b,\dots,c}}{\partial t} + \frac{\partial h_{d,e,\dots,f}^{a,b,\dots,c}}{\partial x^g} v^g \\ & - h_{d,e,\dots,f}^{g,b,\dots,c} \frac{\partial v^a}{\partial x^g} - \text{(todos los superíndices)} \\ & + h_{g,e,\dots,f}^{a,b,\dots,c} \frac{\partial v^g}{\partial x^d} + \text{(todos los subíndices)} \end{aligned} \quad (46)$$

En la anterior expresión puede verse fácilmente que derivada de Lie de una función, tensor de orden  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , coincide con la derivada material lo cual no es cierto ni para vectores ni para formas lineales.

Una característica importante de la derivada de Lie, es que no se necesita una métrica, lo cual sí es preciso para la definición de la derivada tensorial covariante.

La ausencia de una métrica, y por lo tanto del tensor métrico, no nos permite la operación de subida y bajada de índices en los tensores. Por ello al definir la derivada de Lie de un campo tensorial, hay que decir claramente en que posición están los índices, pues se obtienen derivadas de Lie completamente diferentes en cada caso.

Si se define un tensor  $\mathbf{h}$  en un espacio vectorial con métrica (por ejemplo una estructura euclídea) los isomorfismos canónicos  $\bigotimes_{i=1}^n s_i$  ( $s_i = s, s^{-1}, id_e, id_*$  según el caso) permiten identificar los tensores de distinto tipo (y mismo orden) puestos en comunicación por ellos. Es una clase de equivalencia donde  $\mathbf{h}$  y  $\mathbf{h}'$  están relacionados si y solo si existe un  $(\bigotimes_{i=1}^n s_i)$  del tipo descrito tal que  $\mathbf{h}' = (\bigotimes_{i=1}^n s_i) \mathbf{h}$ . Cualquiera de ellos se puede tomar por representante de su clase de equivalencia y desde el punto de vista de componentes esos isomorfismos suben o bajan índices.

En el caso de una variedad diferenciable  $S$  provista de una métrica (campo de tensores  $\mathbf{g}$  dos veces covariante y simétrico) cada  $T_x S$  posee una métrica  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  y la posibilidad de aplicar lo anteriormente expuesto.

Se debe tener mucho cuidado al elegir el tensor  $\mathbf{h}$  (mejor dicho, el representante de la clase definida por  $\mathbf{h}$ ) ya que la derivada de Lie no conmuta con los isomorfismos  $\bigotimes_{i=1}^n s_i$ , y por tanto distintos elementos de la clase tienen derivadas de Lie distintas lo cual no sucede con la derivación covariante.

En Marsden (1983) [83] pág. 100 se incluye un caso simple. Un campo de tensores de segundo orden en  $S$   $\sigma_1 = \sigma^{ab} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b \in T_x S \otimes T_x S$  y los otros tres elementos de su clase para la métrica  $\mathbf{g}(x)$ ,  $\sigma_2 = \sigma_a^b \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}_b \in T_x^* S \otimes T_x S$ ,  $\sigma_3 = \sigma_b^a \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}^b \in T_x S \otimes T_x^* S$  y  $\sigma_4 = \sigma_{ab} \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b \in T_x^* S \otimes T_x^* S$  donde, por ejemplo,

$$\sigma_2 = (s \otimes id) \sigma_1 = \sigma^{ab} s(\mathbf{e}_a) \otimes \mathbf{e}_b = \sigma^{ab} g_{ac} \mathbf{e}^c \otimes \mathbf{e}_b = \sigma_c^b \mathbf{e}^c \otimes \mathbf{e}_b. \quad (47)$$

Se verifican las siguientes relaciones,

$$(L_{\bar{v}} \sigma_1)^{ab} = \dot{\sigma}^{ab} - \sigma^{cb} v^a_{|c} - \sigma^{ac} v^b_{|c} \quad (48)$$

$$g^{ac} (L_{\bar{v}} \sigma_2)_c^b = \dot{\sigma}^{ab} - \sigma^{ad} v^b_{|d} + \sigma^{db} v_d^a{}_{|a} \quad (49)$$

$$(L_{\bar{v}} \sigma_3)^a_c g^{cb} = \dot{\sigma}^{ab} - \sigma^{db} v^a_{|d} + \sigma^{ad} v_d^b{}_{|b} \quad (50)$$

$$g^{ac} (L_{\bar{v}} \sigma_4)_{cd} g^{db} = \dot{\sigma}^{ab} + \sigma^{cb} v_c^a{}_{|a} + \sigma^{ac} v_c^b{}_{|b} \quad (51)$$

donde

$$\dot{\sigma}^{ab} = \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial t} + \sigma^{ab}_{|c} v^c \quad (52)$$

Esta falta de conmutatividad de la derivada de Lie da lugar a que en Mecánica del Continuo aparezcan diversos ritmos temporales de una misma magnitud. En el caso del tensor de tensiones mencionaremos la llamada derivada de Truesdell (Truesdell (1955) [131], pág. 123-132), la derivada corrotacional de Jaumann (Jaumann (1911) [63], pág. 385-530) y la de Green-Naghdi (Green (1965) [54], pág. 251-281).

Cualquier combinación lineal de las ecuaciones (48) a (51) es también un ritmo objetivo; un ejemplo de ello es el tensor de Jaumann viene dado por,

$$\hat{\sigma}^{ab} = \dot{\sigma}^{ab} + \sigma^{ad} \omega_d^b - \sigma^{db} \omega_d^a = \frac{1}{2} \left( (L_{\bar{v}} \sigma_3)^a_c g^{cb} + g^{ac} (L_{\bar{v}} \sigma_2)_c^b \right) \quad (53)$$

donde  $\omega$  es el tensor de rotación

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2} (v_{a|b} - v_{b|a}) \quad (54)$$



## 2.5 Objetividad de la derivada de Lie

Sea  $\mathbf{h}$  un campo tensorial, variable con el tiempo, definido sobre un sólido  $B$  en movimiento. Para un observador situado en un sistema de referencia, **O1**, en general variable con el tiempo, el sólido  $B$  experimenta un movimiento  $\phi_{t,s}$  que transforma la configuración de  $B$  en un instante  $s$ ,  $\phi_s(B)$ , en otra configuración  $\phi_t(B)$ , es decir,

$$\phi_{t,s} : \phi_s(B) \rightarrow \phi_t(B) \quad (55)$$

Análogamente, este fenómeno es visto por otro observador **O2** en movimiento respecto a **O1** como un movimiento distinto  $\psi_{s,t}$  tal que,

$$\psi_{t,s} : \psi_s(B) \rightarrow \psi_t(B) \quad (56)$$

Si  $\zeta_{t^*}$  es el movimiento, no necesariamente uniforme, del sistema de referencia **O2** respecto al sistema **O1**, en cada instante  $t$ , la expresión del tensor  $\mathbf{h}$  en ambos sistemas esta relacionada mediante,

$$\mathbf{h}_2 = \zeta_{t^*} \mathbf{h}_1 \quad (57)$$

donde  $\zeta_{t^*}$  es el avance mediante el flujo  $\zeta$

Este tipo de transformaciones de los tensores entre dos sistemas de referencia (32), que es formalmente la usual de los tensores en el cambio de base,<sup>13</sup> las denominamos objetivas.

Como hemos destacado al principio del capítulo, las ecuaciones constitutivas no pueden formularse mediante las derivadas tensoriales habituales si queremos que sean objetivas, lo cual es una propiedad deseable.

Si denominamos  $\vec{w}$  y  $\vec{v}$  los campos de velocidad correspondientes a los flujos,  $\psi$  y  $\phi$  la objetividad de la derivada de Lie de un campo tensorial exige demostrar,

$$L_{\vec{w}} \mathbf{h}_2 = \zeta_* L_{\vec{v}} \mathbf{h}_1 \quad (58)$$

es decir, que la derivada de Lie de dicho campo para el observador **O2** está relacionada con la derivada de Lie que “ve” el observador **O1** mediante una transformación objetiva.

Una demostración de la objetividad de la derivada de Lie de un campo tensorial puede consultarse en Marsden (1983) [83] pág. 101 a 102. Aquí vamos a dar

<sup>13</sup>Aunque el cambio de base no debe de confundirse con el cambio de sistema de referencia. El cambio de base obedece a un cambio de sistema de coordenadas en el **mismo sistema de referencia** y por lo tanto los coeficientes de sus ecuaciones de transformación son independientes del tiempo.

una demostración distinta apoyándonos en la definición alternativa de la derivada de Lie (41).

La derivada de Lie para el observador **O2** vendrá dada por la expresión,

$$L_{\vec{w}} \mathbf{h2} = \psi_{s^*} \left. \frac{\partial (\psi_t^* \mathbf{h2}_t)}{\partial t} \right|_{t=s} \quad (59)$$

donde sustituyendo, véase ,

$$\psi_* = (\zeta \circ \phi)_* = \zeta_* \circ \phi_* \quad (60)$$

$$\psi^* = (\psi^{-1})_* = ((\zeta \circ \phi)^{-1})_* = \phi_*^{-1} \circ \zeta_*^{-1} = \phi^* \circ \zeta_*^{-1} \quad (61)$$

junto a la objetividad de la transformación tensorial (57) nos permite obtener las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned} L_{\vec{w}} \mathbf{h2} &= \psi_{s^*} \left. \frac{\partial (\psi_t^* \mathbf{h2}_t)}{\partial t} \right|_{t=s} = \zeta_{s^*} \circ \phi_{s^*} \left. \frac{\partial ((\phi_t^* \circ \zeta_{t^*}^{-1})(\zeta_{t^*} \mathbf{h1}_t))}{\partial t} \right|_{t=s} = \\ &= \zeta_{s^*} \circ \phi_{s^*} \left. \frac{\partial (\phi_t^* \mathbf{h1}_t)}{\partial t} \right|_{t=s} = \zeta_* L_{\vec{v}} \mathbf{h1} \end{aligned} \quad (62)$$

que nos prueban la objetividad de la derivada de Lie.

El anterior movimiento  $\zeta_t$  puede generalizarse a movimientos más abstractos en que permitiésemos que hubiese observadores distintos en cada punto material del sólido.

Esta objetividad frente a difeomorfismos es más general y se denomina a veces objetividad covariante.

## 2.6 Movimiento de una microfisura

En este apartado estudiamos el movimiento de una microfisura cuando es “arrastrada” por el sólido al pasar de una configuración  $\phi_s(B)$  en el instante  $s$  a otra  $\phi_t(B)$  en el instante  $t$ .

Suponemos una microfisura circular y plana<sup>14</sup> en el interior de un sólido y representamos su orientación en el espacio mediante la normal a su superficie.

<sup>14</sup>Estas microfisuras son las denominadas “penny” shaped” en las publicaciones de lengua inglesa.

Podemos pensar en dicha normal,  $\vec{n}$ , como el producto vectorial,  $\vec{a} \wedge \vec{b}$ , de dos vectores contenidos en el plano de microfisura.

Sea  $\Phi$  el gradiente de deformación en el punto material  $X$  en cuya vecindad o “microespacio” existe una población de microfisuras entre las que se encuentra nuestra fisura en estudio.

Es decir,  $\Phi$  es una matriz de derivadas parciales  $\Phi^i_k \equiv \partial \phi^i / \partial x^k$  donde  $\phi$  es la función, de componentes  $\phi^i$ , que transforma las coordenadas cartesianas  $(X^1, X^2, X^3)$  de puntos materiales de  $\phi_s(B)$  en sus homólogos de  $\phi_t(B)$ .

Si el punto  $X$  del sólido de componentes  $(X^1, X^2, X^3)$  es el origen de un vector de material  $\vec{A} = (A^1, A^2, A^3)$ , y  $P$  es el punto material  $X + \vec{A}$ , las componentes del vector “arrastrado”  $(\phi \vec{A})^i$  pueden expresarse mediante el desarrollo en serie de Taylor,

$$(\phi \vec{A})^i = \phi^i(P) - \phi^i(X) = \phi^i(X + \vec{A}) - \phi^i(X) = \Phi^i_k(X) A^k + \dots \quad (63)$$

Al ser el tamaño de las microfisuras muy pequeño respecto a las dimensiones del sólido, podemos admitir que los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  en la configuración  $\phi_s(B)$  se transforman linealmente en  $\Phi \vec{a}$  y  $\Phi \vec{b}$  en la configuración  $\phi_t(B)$ , y por lo tanto la normal al plano de la microfisura en el instante  $t$  será,

$$\vec{n}_* = \Phi \vec{a} \wedge \Phi \vec{b} \quad (64)$$

Multiplicando escalarmente ambos miembros de la anterior ecuación por un vector genérico  $\vec{z}$  tenemos<sup>15</sup>,

$$\begin{aligned} \vec{n}_* \cdot \vec{z} &= (\Phi \vec{a} \wedge \Phi \vec{b}) \cdot \vec{z} = \det(\Phi \cdot (\vec{a}, \vec{b}, \Phi^{-1}(\vec{z}))) = \det \Phi \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}, \Phi^{-1}(\vec{z})) \\ &= (\det \Phi) \vec{a} \wedge \vec{b} \cdot \Phi^{-1}(\vec{z}) = (\det \Phi) \vec{n} \cdot \Phi^{-1}(\vec{z}) = (\det \Phi) \Phi^{-T} \vec{n} \cdot \vec{z} \end{aligned} \quad (65)$$

con lo que obtenemos,

$$\vec{n}_* = (\det \Phi) \Phi^{-T} \vec{n} \quad (66)$$

que es una expresión de  $\vec{n}_*$  más conveniente pues nos relaciona el vector normal en el instante  $t$  con la normal en el instante  $s$  y el gradiente de deformación.

<sup>15</sup>Indicamos con el superíndice  $T$  el tensor traspuesto para evitar posibles confusiones con  $t$  que lo reservamos para indicar el tiempo. Por  $\Phi^{-T}$  indicamos la traspuesta de la matriz inversa de  $\Phi$

El vector  $\vec{n}_*$  no es, en general, de módulo unidad y por lo tanto la normal unitaria al plano de la microfisura en la configuración  $\phi_t(B)$  será,

$$\vec{n}_*^1 = \frac{\vec{n}_*}{\|\vec{n}_*\|} = \frac{\Phi^{-T} \vec{n}}{\|\Phi^{-T} \vec{n}\|} \quad (67)$$

## 2.7 Velocidad de variación de la normal a una microfisura

La derivada temporal de la normal unitaria<sup>16</sup>  $\vec{n}^1 = \vec{n}/\|\vec{n}\|$  de una microfisura, que representaremos por  $\vec{w}(\vec{n}^1)$ , vendrá definida como,

$$\vec{w}(\vec{n}^1) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{\vec{n}_*^1 - \vec{n}^1}{t - s} = \left. \frac{d \vec{n}_*^1}{dt} \right|_{t=s} \quad (68)$$

Sustituyendo en la anterior derivada la ecuación (67) obtenemos,

$$\frac{d \vec{n}_*^1}{dt} = \frac{\frac{d \Phi^{-T}}{dt} \vec{n}}{\|\Phi^{-T} \vec{n}\|} - \frac{\frac{d \Phi^{-T}}{dt} \vec{n} \cdot \Phi^{-T} \vec{n}}{\|\Phi^{-T} \vec{n}\|^3} \Phi^{-T} \vec{n} \quad (69)$$

Por lo tanto es necesario calcular  $\frac{d \Phi^{-T}}{dt}$  lo cual podemos conseguir derivando respecto al tiempo la igualdad,

$$I = \Phi^T \Phi^{-T} \quad (70)$$

con lo que obtenemos,

$$O = \Phi^T \frac{d \Phi^{-T}}{dt} + \frac{d \Phi^T}{dt} \Phi^{-T} \quad (71)$$

donde  $O$  es la matriz nula.

Premultiplicando por  $\Phi^{-T}$  en la ecuación anterior obtenemos,

$$\frac{d \Phi^{-T}}{dt} = -\Phi^{-T} \frac{d \Phi^T}{dt} \Phi^{-T} \quad (72)$$

Sustituyendo (véase Malvern [81], pág. 163),

<sup>16</sup>En este apartado  $\vec{n}^1$  significa el vector  $\vec{n}$  normalizado (a módulo unidad), no la primera componente del vector.

$$\frac{d\Phi}{dt} = (\text{grad}\vec{v}) \Phi \quad (73)$$

en (72) tenemos finalmente,

$$\frac{d\Phi^{-T}}{dt} = (\text{grad}\vec{v})^T \Phi^{-T} \quad (74)$$

Esta ecuación sustituida en (69) nos permite obtener,

$$\frac{d\vec{n}_*^1}{dt} = -\frac{(\text{grad}\vec{v})^T \Phi^{-T}}{\|\Phi^{-T}\vec{n}\|} \vec{n} + \frac{((\text{grad}\vec{v})^T \Phi^{-T}) \vec{n} \cdot \Phi^{-T}\vec{n}}{\|\Phi^{-T}\vec{n}\|^3} \Phi^{-T}\vec{n} \quad (75)$$

que particularizada para  $t = s$ , y por lo tanto sustituyendo  $\Phi$  por la matriz identidad  $I$  y  $\vec{n}_*^1$  por  $\vec{n}^1$ , nos permite llegar a la siguiente expresión para la velocidad de variación de la normal,  $\vec{w}(\vec{n}^1)$

$$\vec{w}(\vec{n}^1) = \frac{d\vec{n}^1}{dt} = ((\text{grad}\vec{v})^T \vec{n}^1 \cdot \vec{n}^1) \vec{n}^1 - (\text{grad}\vec{v})^T \vec{n}^1 \quad (76)$$

Si el vector normal  $\vec{n}$  no es unitario pero conserva su longitud constante, mientras permanece perpendicular a la fisura cuando esta es arrastrada por el material, su velocidad viene dada por la expresión,

$$\vec{w}(\vec{n}) = \frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{(\text{grad}\vec{v})^T \vec{n} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} - (\text{grad}\vec{v})^T \vec{n} \quad (77)$$

obtenida al sustituir (76) en la ecuación,

$$\frac{d\vec{n}}{dt} = \|\vec{n}\| \frac{d\vec{n}^1}{dt} + \frac{d\|\vec{n}\|}{dt} \vec{n}^1 \quad (78)$$

donde el segundo sumando es cero por permanecer constante el módulo del vector.

Multiplicando escalarmente por  $\vec{n}$  en (77), y análogamente podría hacerse en (76), obtenemos,

$$\vec{w}(\vec{n}) \cdot \vec{n} = 0 \quad (79)$$

lo cual nos indica que  $\vec{n}$  permanece ortogonal a su derivada, que era una propiedad esperada dado su significado físico.

Debe también notarse que los vectores  $(\text{grad}\vec{v}) \vec{n}$ ,  $(\text{grad}\vec{v})^T \vec{n}$  y  $d\vec{n}$  dan todos el mismo valor cuando se multiplican escalarmente por  $\vec{n}$ . El tensor de

segundo orden  $\mathbf{d}$  es la velocidad de deformación (Fung (1965) [42], pág. 442, 443), es decir, la parte simétrica del gradiente de la velocidad espacial que se ha definido en la página 20.

## 2.8 Convección del campo densidad de normales de microfisuras

En cada punto material  $X$  consideramos una función diferenciable  $N(t, \vec{n})$ ,  $\vec{n} \in S_n$  donde  $S_n$  es la esfera unidad. Esta función representa la densidad de normales de microfisuras por unidad de ángulo sólido en el instante  $t$ .

Es decir, si  $P$  es una parte medible de  $S_n$ , la integral,

$$\int_P N(t, \vec{n}) dS_n \quad (80)$$

nos da el número de microfisuras por unidad de volumen de sólido que tienen, en el punto material  $X$  y en el instante  $t$ , normales dentro del ángulo sólido que proyecta  $P$  desde el centro de la esfera.

La función  $N(t, \vec{n})$  representa densidad de orientaciones de normales y por lo tanto dependerá de la dirección del vector  $\vec{n}$  pero no de su módulo, ni incluso de su sentido, lo cual podemos escribir como,

$$N(t, \alpha \vec{n}) = N(t, \vec{n}) \quad (81)$$

que expresa que la función  $N$  es homogénea de grado cero en  $\vec{n}$ .

El teorema de Euler<sup>17</sup> para funciones homogéneas de grado cero nos permite expresar la condición (81) con la siguiente ecuación,

$$\vec{n} \cdot \vec{\text{grad}}_{\vec{n}} N = 0 \quad (82)$$

En la convección de las microfisuras debida al movimiento del sólido sus normales varían, con velocidad  $\vec{w}(\vec{n})$ , pero si consideramos una parte  $P$ , y suponemos no se produce nucleación de nuevas microfisuras, la integral (80) permanecerá constante en el tiempo, es decir,

$$\frac{d}{dt} \int_P N(t, \vec{n}) dS_n = 0 \quad (83)$$

<sup>17</sup>Una función  $f(\vec{x})$  es homogénea de grado  $r$  en  $\vec{x}$  si  $f(\alpha \vec{x}) = \alpha^r f(\vec{x})$ . El teorema de Euler establece que si  $f(\vec{x})$  es continuamente diferenciable y homogénea de grado  $r$  entonces se verifica  $\vec{x} \cdot \vec{\text{grad}}_{\vec{x}} (f(\vec{x})) = r f(\vec{x})$

Esta condición integral puede expresarse en forma diferencial local mediante el llamado teorema del transporte (Abraham, Marsden y Tudors (1988) [2], pág. 469) como,

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \text{div}_{\vec{n}}(N\vec{w}) = 0 \quad (84)$$

que podemos transformar en

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \vec{w} \cdot \vec{\text{grad}}_{\vec{n}} N + N \text{div}_{\vec{n}} \vec{w} = 0 \quad (85)$$

Podemos calcular  $\text{div}_{\vec{n}} \vec{w}$  a partir de (77). La divergencia del segundo sumando,  $(\text{grad}_{\vec{v}})^T \vec{n}$ , es la traza del tensor  $\text{grad}_x \vec{v}$  que es igual a  $\text{div}_x \vec{v}$ , donde se ha indicado explícitamente que el gradiente y la divergencia corresponden al punto material  $X$ .

El primer sumando de (77) es del tipo  $A\vec{n}$  donde  $A = \frac{(\text{grad}_{\vec{v}})^T \vec{n} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$  y por lo tanto,

$$\text{div}_{\vec{n}}(A\vec{n}) = A \text{div}_{\vec{n}} \vec{n} + \left( \vec{\text{grad}}_{\vec{n}} A \right) \cdot \vec{n} \quad (86)$$

Al ser la función  $A$  homogénea de grado cero en  $\vec{n}$  se verifica  $\vec{n} \cdot \vec{\text{grad}}_{\vec{n}} A = 0$  y por lo tanto podemos escribir,

$$\text{div}_{\vec{n}} \vec{w} = 3 \frac{(\text{grad}_x \vec{v})^T \vec{n} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} - \text{div}_x \vec{v} \quad (87)$$

Sustituyendo (77) en el segundo sumando de (85) obtenemos,

$$\vec{w} \cdot \vec{\text{grad}}_{\vec{n}} N = - \left( (\text{grad}_x \vec{v})^T \vec{n} \right) \cdot \vec{\text{grad}}_{\vec{n}} N \quad (88)$$

pues según se ha visto anteriormente (82)  $\vec{n}$  es ortogonal a  $\vec{\text{grad}}_{\vec{n}} N$

Finalmente, sustituyendo en (85) las ecuaciones (87) y (88) obtenemos,

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \left( (\text{grad}_x \vec{v})^T \vec{n} \right) \cdot \vec{\text{grad}}_{\vec{n}} N - N \text{div}_x \vec{v} + \frac{3N}{\|\vec{n}\|^2} (\text{grad}_x \vec{v})^T \vec{n} \cdot \vec{n} = 0 \quad (89)$$

que junto a la condición de ortogonalidad (82) nos da la evolución por convección de la función densidad de normales de microfisuras.

## 2.9 Objetividad del ritmo temporal de la densidad de normales

La ecuación (89) tiene dimensiones de tasa de variación de la función densidad de normales respecto al tiempo. Esta variación es nula en el caso de ausencia de nucleación de microfisuras.

Ahora bien, ¿es este ritmo válido para la formulación de una ecuación constitutiva de un material con comportamiento frágil?. La respuesta es no, puesto que en dicho ritmo no se tiene en cuenta el crecimiento<sup>18</sup> de las microfisuras.

Para considerar este aspecto ampliamos el “microespacio”  $S_n$  (en cada punto material  $X$ ) al producto cartesiano de  $R^+ \times S_n$ , que además de la orientación de las normales, permite representar, mediante  $R^+$ , todos los posibles tamaños  $r$  de microfisuras (números reales positivos).

Por ello definimos en este espacio ampliado una función de densidad de microfisuras que representaremos como  $h(t, r, \vec{n})$ , con  $(r, \vec{n}) \in R^+ \times S_n$ .

Evidentemente,

$$N(t, \vec{n}) = \int_{R^+} h(t, r, \vec{n}) dr \quad (90)$$

Si generalizamos (84) al nuevo espacio  $R^+ \times S_n$  podemos construir un nuevo ritmo  $\Gamma$

$$\Gamma \equiv \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}_{(r, \vec{n})} (h(t, r, \vec{n}) (W, \vec{w})) \quad (91)$$

donde  $W(t, r, \vec{n})$  es la velocidad de propagación de las microfisuras de tamaño  $r$  y orientación  $\vec{n}$ .

Podemos expresar el anterior ritmo más detalladamente como,

$$\Gamma \equiv \frac{\partial h}{\partial t} + W \frac{\partial h}{\partial r} + \vec{w} \cdot \vec{\text{grad}}_{\vec{n}} h + h \frac{\partial W}{\partial r} + h \text{div}_{\vec{n}} \vec{w} \quad (92)$$

Si en un determinado punto material  $X$  no hay nucleación, el ritmo  $\Gamma$  será cero, en caso contrario  $\Gamma$  tomará un valor igual a la tasa de nucleación de microfisuras en dicho punto.

<sup>18</sup> Las leyes de nucleación y crecimiento de microfisuras se tratan en el siguiente capítulo.



Vamos a demostrar la objetividad del ritmo  $\Gamma$ , que es una propiedad previsible dada la naturaleza física de tal ritmo. Puede merecer la pena considerar inicialmente un método que falla al tratar de demostrar la objetividad.

Supondremos que  $h$  es un campo escalar en el microespacio asociado a cada punto.

La derivada de Lie de este campo escalar se puede calcular mediante (46) considerando  $h$  como un campo tensorial de orden cero, obteniéndose,

$$\tilde{\Gamma} \equiv L_{(W, \vec{w})} h = \frac{\partial h}{\partial t} + W \frac{\partial h}{\partial r} + \vec{w} \cdot \vec{\text{grad}}_{\vec{n}} h \quad (93)$$

que únicamente coincide con los tres primeros términos de  $\Gamma$ .

### 2.9.1 Derivada de Lie de un campo completamente antisimétrico

Un tensor se denomina simétrico respecto a un conjunto de índices, cuando al intercambiar un par de índices covariantes de dicho conjunto, sus componentes no cambian de valor (y análogamente los contravariantes).

Se dice que un tensor es antisimétrico respecto a un determinado conjunto de índices, cuando al intercambiar un par de índices covariantes (o contravariantes) de ese conjunto, el valor de sus componentes únicamente cambia de signo; y por lo tanto, son nulas todas aquellas componentes que tengan dos índices iguales del conjunto de índices respecto al que es antisimétrico.

Diremos que un tensor, covariante, de orden  $\binom{p}{0}$  es completamente antisimétrico cuando es antisimétrico respecto a todos sus índices.

Si el orden del tensor  $h$  coincide con la dimensión del espacio,  $n$ , todas sus componentes no nulas (aquellas cuyos índices no se repiten) toman el mismo valor excepto el signo.

Las componentes de este tensor  $h$  completamente antisimétrico de orden  $n$  pueden expresarse en función de su componente  $h_{1,2,\dots,n}$ , que denotaremos abreviadamente por  $h$ , mediante la siguiente expresión,

$$h_{j_1, j_2, \dots, j_n} = h \varepsilon_{j_1, j_2, \dots, j_n} \quad (94)$$

donde,

$$\varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \begin{cases} +1 & \text{si } i_1, i_2, \dots, i_n \text{ es una permutación par de } 1, 2, 3, \dots, n \\ 0 & \text{si dos índices de } i_1, i_2, \dots, i_n \text{ son iguales} \\ -1 & \text{si } i_1, i_2, \dots, i_n \text{ es una permutación impar de } 1, 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (95)$$

Se demuestra fácilmente que la simetría y la antisimetría son propiedades invariantes respecto a la transformación de coordenadas (véase, por ejemplo, Sokolnikoff (1979) [128] pág. 90).

La transformación de la única componente en sentido estricto,  $h$ , en un sistema de coordenadas  $\{X^A\}$  a otro sistema  $\{\bar{X}^A\}$  puede hallarse particularizando la expresión general (12) de cambio de base de los tensores, obteniéndose,

$$\bar{h} \equiv \bar{h}_{1,2,\dots,n} = h \varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_n} \frac{\partial X^{i_1}}{\partial \bar{X}^1} \frac{\partial X^{i_2}}{\partial \bar{X}^2} \dots \frac{\partial X^{i_n}}{\partial \bar{X}^n} = h J(X/\bar{X}) \quad (96)$$

donde  $J(X/\bar{X})$  es el determinante Jacobiano de la transformación al sistema de coordenadas  $\{X^A\}$  desde el sistema  $\{\bar{X}^A\}$ .

Aplicando la ecuación del retroceso de un campo tensorial cualquiera a la componente de índices  $1, 2, \dots, n$  de un campo completamente antisimétrico de orden igual a la dimensión del espacio obtenemos,

$$(\phi^* \mathbf{h})_{1,2,\dots,n}(X) = h(x) \varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot \Phi_1^{i_1}(X) \dots \Phi_n^{i_n}(X) = (\det \Phi(X)) h(x) \quad (97)$$

Particularizando la ecuación (46) de la derivada de Lie a este caso,

$$\begin{aligned} (L_{\vec{v}} \mathbf{h})_{1,2,\dots,n} &= \frac{\partial h_{1,2,\dots,n}}{\partial t} + v^i \frac{\partial h_{1,2,\dots,n}}{\partial x^i} + \\ &h_{i,2,\dots,n} \frac{\partial v^i}{\partial x^1} + h_{1,i,\dots,n} \frac{\partial v^i}{\partial x^2} + \dots + h_{1,2,\dots,i} \frac{\partial v^i}{\partial x^n} \\ &= \frac{\partial h}{\partial t} + v^i \frac{\partial h}{\partial x^i} + h \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (98)$$

o abreviadamente,

$$(L_{\vec{v}} \mathbf{h})_{1,2,\dots,n} = \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} h + h \text{div } \vec{v} \quad (99)$$

### 2.9.2 Derivada de Lie de un campo densidad tensorial

La noción de densidad tensorial, aunque es un concepto matemático establecido, está bastante olvidado en la literatura moderna en la que apenas se encuentran definiciones, sin posterior desarrollo, bajo la denominación de tensores relativos o pseudotensores (Sokolnikoff (1979) [128]). Una referencia bastante completa, aunque en el lenguaje de la época, se encuentra en Schouten y Kulk (1949) [114].

Los tensores densidad son objetos matemáticos representados por  $n^{p+q}$  funciones (componentes) que al cambiar de sistema de coordenadas se transforman de acuerdo a una ley más general que los tensores

$$\bar{H}^{A_1 \dots A_p}_{B_1 \dots B_q} = \frac{\partial \bar{X}^{A_1}}{\partial X^{C_1}} \dots \frac{\partial \bar{X}^{A_p}}{\partial X^{C_p}} H^{C_1 \dots C_p}_{D_1 \dots D_q} \frac{\partial X^{D_1}}{\partial \bar{X}^{B_1}} \dots \frac{\partial X^{D_q}}{\partial \bar{X}^{B_q}} \left| \frac{\partial(X^1, \dots, X^n)}{\partial(\bar{X}^1, \dots, \bar{X}^n)} \right|^w \quad (100)$$

donde  $\left| \frac{\partial(X^1, \dots, X^n)}{\partial(\bar{X}^1, \dots, \bar{X}^n)} \right|$  designa al determinante jacobiano de la transformación,

anteriormente representado por  $J(X/\bar{X})$ , y  $w$  es una constante entera.

Diremos que  $H$  es un tensor densidad de orden  $\binom{p}{q}$  y peso  $w$ . Los tensores ordinarios son un caso especial de los tensores densidad (para  $w=0$ ) y cuando hay posibilidad de confusión se denominan tensores absolutos,

Al tensor densidad de orden 0 y peso  $w=1$  se le llama densidad escalar y al de peso  $w=-1$  capacidad escalar.

El origen del término densidad escalar, se debe a que el campo densidad de masa en cada punto material, se transforma al cambiar de sistema de coordenadas de acuerdo a la ley de los tensores densidad de orden 0 y peso 1. En efecto si la masa contenida en un volumen  $V$  viene expresada en el sistema de coordenadas  $\{X^A\}$  por,

$$M = \int_V \rho(X) dV \quad (101)$$

y si hacemos un cambio de variables de integración para expresarla en otro sistema de coordenadas  $\{\bar{X}^A\}$  la masa  $M$  vendrá dada por la expresión,

$$M = \int_{\bar{V}} \rho(\bar{X}) J(X/\bar{X}) d\bar{V} \equiv \int_{\bar{V}} \bar{\rho}(\bar{X}) d\bar{V} \quad (102)$$

y por lo tanto la densidad se transforma de acuerdo a,

$$\bar{\rho}(\bar{X}) = \rho(\bar{X}) J(X/\bar{X}) \quad (103)$$

que corresponde a la transformación de un tensor densidad de orden 0 y peso 1.

La anterior ecuación que es la misma relación (96) obtenida al cambiar de base la única componente en sentido estricto de un tensor covariante completamente antisimétrico de orden igual a la dimensión del espacio.

Por ello identificamos las densidades escalares con dichos tensores lo que nos permite calcular la derivada de Lie del campo densidad escalar,  $h$ , debida a un flujo  $\vec{v}$ , mediante la ecuación (99) y

$$(L_{\vec{v}}h) = \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} h + h \text{div } \vec{v} \quad (104)$$

Si suponemos que la función densidad de microfisuras  $h(t, r, \vec{n})$  del apartado 2.9 es un campo densidad escalar la anterior ecuación nos permite, dada la objetividad de la derivada de Lie, afirmar que el ritmo  $\Gamma$  es objetivo.

# 3. EVOLUCIÓN DE UNA POBLACIÓN DE FISURAS PARALELAS

<b>3.1 Materiales frágiles</b>	<b>47</b>
<b>3.2 Nucleación de microfisuras</b>	<b>49</b>
<b>3.3 Crecimiento de microfisuras</b>	<b>52</b>
3.4 Población de microfisuras paralelas	55
3.4.1 Poblaciones de fisuras de tamaño $R_f$ inferior a $R_w$	60
3.4.2 Poblaciones de fisuras de tamaño $R_f$ superior a $R_w$	62
<b>3.5 Evaluación de la función densidad de fisuras</b>	<b>64</b>
3.5.1 Distribuciones de máxima entropía	64
3.5.2 Aproximación mediante distribuciones de máxima entropía	67
3.5.3 Aproximación mediante polinomios de Chebyshev	69
3.5.4 Cálculo de los momentos de los polinomios de Chebyshev	71
<b>3.6 Volumen de microfisuras</b>	<b>73</b>
<b>3.7 Implementación computacional</b>	<b>74</b>
3.7.1 Integración temporal de las ecuaciones de movimiento	74
3.7.2 Cálculo de deformaciones	75
3.7.3 Leyes constitutivas del material sin fisurar	76
3.7.4 Leyes constitutivas del material fisurado	76
3.7.5 Evolución de la población de microfisuras	78

### **3.1 Materiales frágiles**

Los materiales frágiles se caracterizan por no presentar, al menos desde un punto de vista macroscópico, deformación plástica aunque sean sometidos a cargas elevadas.

Ejemplo de este tipo de materiales son el vidrio, aceros de alta resistencia, materiales cerámicos, rocas, etc. Un mismo material puede ser frágil a bajas temperaturas y tener un comportamiento dúctil a temperaturas más elevadas, e incluso manifestar distinto comportamiento según la velocidad de deformación a la que se someta.

Al ser los materiales frágiles incapaces de deformarse plásticamente, sus características resistentes están muy influenciadas por la existencia de microdefectos como inclusiones, discontinuidades de borde de grano, etc.

Al ensayar a tracción estos materiales, se observa una relación lineal entre tensión y deformación hasta prácticamente el momento de rotura.

Esta rotura se inicia en un microdefecto que al sobrepasar una cierta tensión aumenta de tamaño y se convierte en una fisura macroscópica. Esta grieta descarga el material adyacente cuyas microfisuras no pueden alcanzar la tensión umbral necesaria para su crecimiento.

Este modelo de fallo de material frágil por crecimiento catastrófico de una grieta, tiene gran interés en la ingeniería y es objeto de estudio en la Mecánica de la Fractura Lineal.

Se observa que la resistencia a la rotura de materiales frágiles sometidos a cargas de gran intensidad y corto tiempo de aplicación, como impactos y explosiones, es mayor que su resistencia a cargas más lentas.

Esta aparente paradoja es debida a que el modelo de fisura dominante, mencionado más arriba, no es aplicable al caso de cargas elevadas de corta duración que requieren un enfoque micromecánico.

La iniciación de la fractura bajo cargas dinámicas ha sido estudiada experimentalmente por Ravi-Chandar y Knauss (1984) [105] [106] [107] [108] en Homalite-100 (un material plástico de comportamiento frágil) y por Costin, Duffy y Freund (1977) [26] en metales, entre otros.

Estos estudios mostraron que cuando una grieta alcanza su tensión crítica (cuyo valor depende de su tamaño) no crece instantáneamente sino que necesita un tiempo, llamado periodo de incubación o tiempo de iniciación, para comenzar su propagación. Dicho tiempo es dependiente de la magnitud de la carga aplicada.

En el caso de cargas tipo impulso, una vez alcanzada la tensión umbral necesaria para propagar el defecto más severo y durante su tiempo de incubación, la tensión sigue aumentando rápidamente sobrepasando la tensión crítica en otros defectos de menor tamaño e incluso, si la carga es suficientemente intensa, se producen nuevos defectos.

A medida que estas microfisuras, una vez transcurrido su tiempo de incubación, aumentan su tamaño (crecimiento) y número (nucleación) la rigidez efectiva del material disminuye lo cual, a igualdad de velocidad de deformación, produce primero una reducción de la tasa de incremento de la tensión y posteriormente un descenso de la misma.

Esto explica que los modelos de grieta única no sean aplicables a este tipo de cargas donde el gran número de microfisuras a considerar (del orden de  $10^4$  a  $10^8$  fisuras/cm<sup>3</sup>) hace necesario disponer de modelos de material frágil con un enfoque estadístico que eviten tratar cada microfisura individualmente.

Modelos de este tipo, denominados modelos micromecánicos de fractura o modelos de daño, han sido desarrollados, aunque con grandes limitaciones, por Seaman, Curran y Shockey (1976) [115] y Grady y Kipp (1979) [49].

Estos modelos introducen una variable interna llamada daño, que considera la pérdida de la capacidad resistente en cada punto del material debida a la población de microfisuras en dicho lugar.

Esta variable tiene naturaleza escalar en los modelos más simples, pero en los modelos más completos, el daño es una variable de naturaleza vectorial o tensorial.

Existen gran cantidad de criterios para definir el daño en las publicaciones, pero merecen destacarse los artículos de Kachanov (1980) [68], (1987) [66] [67] y (1989) [65] que fue el impulsor del concepto de daño y los artículos de Hori y Nemat-Nasser (1983) [60] y (1988) [61].

Si la carga aplicada es suficientemente elevada, al crecer las microfisuras interaccionan entre ellas e incluso se unen formando varias grietas que provocan finalmente la fragmentación del material.

Aunque Curran, Seaman y Shockey (1987) [28], Grady y Kipp [53] [51], (1985) [52], Fournery y otros [40] y Kuszmaul [77] han estudiado la fragmentación de materiales, el fenómeno es demasiado complejo para poderse abordar mediante modelos teóricos.

En esta Tesis consideraremos la evolución de una población de fisuras debida a nucleación y crecimiento de microfisuras pero no su coalescencia. Estas condiciones son representativas de los estados de deterioro iniciales y medios.

### **3.2 Nucleación de microfisuras**

Entendemos por nucleación la aparición de nuevas fisuras. La nucleación se produce en heterogeneidades del material como inclusiones, bordes de grano u otras imperfecciones ya sean naturales (como por ejemplo en los materiales geológicos), inherentes al proceso de su fabricación, o producidas como consecuencia de la historia de sollicitaciones anterior a la objeto de estudio.

La mayoría de estas singularidades tienen dimensiones submicroscópicas o inferiores al tamaño de grano donde, la habitual hipótesis del continuo en el estudio de materiales no sería aplicable.

Por ello consideramos nucleación a la aparición de fisuras superiores a una dimensión del orden de tamaño de grano. Por lo tanto esta "nucleación" incluye un cierto crecimiento submicroscópico.

Una adecuada caracterización de la población de microfisuras, debe incluir al menos el número de las mismas y su distribución en forma y tamaño.

En materiales dúctiles, la nucleación produce microvacíos de forma aproximadamente esférica y su tamaño se caracteriza mediante el radio.

En materiales frágiles, que son los contemplados en esta tesis, la nucleación produce microfisuras. Estas microfisuras en materiales como los policarbonatos, que son transparentes, se observan circulares y planas.

Por ello para describir una microfisura aparte de su tamaño, expresado por su radio (o su radio medio en fisuras elípticas), necesitamos definir su orientación espacial. Esta orientación se representa mediante un vector normal al plano de la fisura.

Aunque existen modelos analíticos de nucleación (véase, por ejemplo, Krausz y Eyring (1975) [74] y Goods y Brown (1979) [47]) el fenómeno es tan complejo que ninguno de ellos puede predecir cuantitativamente la nucleación y es necesario recurrir a ensayos.

La caracterización experimental de la ley de nucleación, consiste en someter probetas del material a distintos niveles de tensión y deformación constantes durante precisos periodos de tiempo. En materiales transparentes, las características de la distribución de fisuras como número, tamaño y orientación de las mismas se obtiene por observación directa de la probeta. En materiales opacos, se realiza un examen metalográfico de secciones de la probeta y mediante procedimientos estadísticos se puede deducir la distribución volumétrica de las fisuras (véase Seaman, Curran y Crewdson (1978) [116]).

Los elevados niveles de carga y cortos tiempos de aplicación necesarios para caracterizar la nucleación, requieren ensayos especiales como impactos de placas disparadas con cañones de gas o barras de Hopkinson.



Estos estudios experimentales indican, que para que se produzca nucleación, es necesario superar un cierto nivel de tensión que es característico de cada material.

Probablemente este criterio es demasiado simplista y para valores próximos a esta tensión umbral, sea necesario considerar otras variables como los tensores de deformación y/o tensión a semejanza con los criterios de plastificación.

En los modelos micromecánicos de material, la caracterización del deterioro, expresado habitualmente mediante la variable daño, se hace en cada punto (o elemento de discretización del continuo en el caso del método de los elementos finitos) a partir de la población de microfisuras.

En este capítulo vamos a suponer que todas las fisuras son paralelas y la tensión que actúa sobre ellas es normal al plano de las mismas.

En el modelo de microfisuración BFRAC T [28] todas las fisuras de cada elemento de material se suponen perpendiculares a la dirección de tensión de tracción máxima al comienzo de la nucleación. Esta orientación se mantiene constante a lo largo de todo el proceso posterior.

Aunque esta simplificación puede ser admisible en estados de deformación uniaxial mantenidos durante todo el estudio, es una limitación poco realista en un modelo de microfisuración de propósito general.

Por ello, en el capítulo siguiente consideraremos el caso más general de poblaciones de fisuras con orientaciones distintas y temporalmente cambiantes con las sollicitaciones a que esté sometido cada elemento material.

La ley de nucleación considerada en el modelo BFRAC T se ha formulado a partir de los estudios experimentales realizados y viene dada por las siguientes expresiones:

Densidad de fisuras nucleadas por unidad de tiempo:

$$\frac{dN}{dt} = \begin{cases} T_4 \left( e^{(\sigma_n - \sigma_c)/T_6} - 1 \right) & \text{si } \sigma_n \geq \sigma_c \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (1)$$

donde,

$T_4$  tasa de nucleación ( *número de fisuras/cm<sup>3</sup>/s* )  
 $\sigma_c$  tensión umbral de nucleación ( *dinas/cm<sup>2</sup> o MPa* )  
 $T_6$  sensibilidad a la tensión ( *dinas/cm<sup>2</sup> o MPa* )

son parámetros característicos de cada material y  $\sigma_n$  es la tensión normal al plano de las fisuras ( *dinas/cm<sup>2</sup> o MPa* ).

Distribución en tamaños de las fisuras nucleadas:

La clasificación por tamaños de las fisuras nucleadas viene representada por la siguiente función de densidad,

$$n(r) = \begin{cases} \frac{e^{-r/R_n}}{R_n(e^{-R_c/R_n} - e^{-T_7/R_n})} & \text{si } R_c \leq r \leq T_7 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (2)$$

donde,

$R_n$  es un parámetro del material (cm.)  
 $T_7$  es el tamaño máximo (cm.) fisuras nucleadas (parámetro)  
 $R_c$  tamaño mínimo (cm.) de las fisuras nucleadas

En materiales frágiles, de acuerdo a la Mecánica de la Fractura Lineal, el tamaño crítico  $R_c$  de una fisura circular en un medio infinito sometido a un campo de tensiones  $\sigma_n$ , normal al plano de la fisura, viene dado (véase, por ejemplo, Cherepanov (1979) [31], pág. 835) por,

$$R_c = \frac{\pi}{4} \left( \frac{K_{ic}}{\sigma_n} \right)^2 \quad (3)$$

donde  $K_{ic}$  es la tenacidad a la fractura (con dimensiones  $\text{dina/cm}^{3/2}$  o  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ) que es una característica del material

Por lo tanto el número de fisuras nucleadas por unidad de volumen con tamaño  $r$  viene dado por,

$$\rho_{nuc}(r, t) = n(r) \frac{dN}{dt} \quad (4)$$

Las anteriores ecuaciones de nucleación se han programado en la función FORTRAN **RNUC** que se incluye en el Apéndice 1. Podrían considerarse otras leyes de nucleación, y su implementación sería inmediata, pero se ha optado por la descrita anteriormente al disponer de datos experimentales para diversos materiales.

### 3.3 Crecimiento de microfisuras

Para realizar el estudio del crecimiento de las microfisuras de un material, es necesario un criterio de propagación de las mismas.

En la teoría de la Mecánica de la Fractura, la propagación de una grieta solamente es posible cuando el campo mecánico en el extremo de la grieta alcanza y mantiene un valor característico del material.

En materiales frágiles, o aquellos en que la zona inelástica del extremo de la grieta es muy pequeña, los criterios de propagación se basan fundamentalmente en una generalización del concepto del factor de intensidad de tensiones de Irwin (1948) [62] y en el criterio energético de Griffith (1920) [55].

Generalizando el criterio de Griffith al estudio de la fractura dinámica, se establece que la propagación de una grieta se produce cuando la energía liberada por el sólido al deformarse a la nueva configuración es igual a la energía de fractura dinámica del material.

La energía de fractura dinámica representa la resistencia al avance de la grieta y es una propiedad característica del material que se determina mediante ensayo.

En el criterio de Irwin, la resistencia al avance de una grieta viene caracterizada por la tenacidad a la fractura que es una propiedad del material (como el módulo de elasticidad o la densidad) que define la intensidad del campo de tensiones en el extremo de la grieta. En el estudio de la fractura dinámica se determina la tenacidad a la fractura dinámica para cada velocidad y su valor define el campo de tensiones del extremo de grieta necesario para su propagación a dicha velocidad.

Ambos criterios, para cada velocidad de propagación de la grieta, están relacionados mediante una ecuación (véase Freund (1990) [41], pág. 231 a 235).

Mott (1948) [86] basándose en los anteriores criterios de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal dedujo la expresión que nos da la velocidad de propagación de una grieta de tamaño  $r$ ,

$$w(r) = \frac{dr}{dt} = C_R \left( 1 - \frac{R_c}{r} \right) \quad (r \geq R_c) \quad (5)$$

donde,

$R_c$  es el tamaño crítico de crecimiento en una grieta circular y plana (cm)  
 $C_R$  es la velocidad máxima de propagación (velocidad de Rayleigh) (cm/s)

La anterior ecuación es válida para tamaños de grieta  $r$  superiores a  $R_c$ , no modificándose el tamaño de las grietas inferiores a  $R_c$ . La velocidad de propagación aumenta rápidamente para tamaños superiores a  $R_c$  hasta el valor límite  $C_R$  (dependiente del material).

El valor umbral  $R_c$  del tamaño de las grietas que pueden crecer, dependiente de la geometría y de la carga aplicada, viene dado para una grieta circular y plana sometida a una tensión remota normal al plano de la grieta por la ecuación (3)

Otros autores como Dulaney y Brace (1960) [36] y Berry (1960) [12] dedujeron expresiones de propagación más complejas, pero aunque estas ecuaciones teóricas han sido importantes en el desarrollo de la Mecánica de la Fractura, sólo se han comprobado válidas para velocidades de propagación pequeñas donde los efectos inerciales no son importantes.

Posteriormente, se realizaron ensayos de caracterización de la fractura dinámica de algunos materiales estructurales para los que se determinan curvas de la tenacidad a la fractura dinámica  $K_{Id}$  en función de la velocidad de propagación de la grieta. Véanse, por ejemplo, los artículos de Shukla, Agarwal y Nigam (1988) [120], Lam y Freund (1985) [78], Rosakis y Zehnder (1985) [111], Ravichandran y Clifton (1989) y Zehnder y Rosakis (1990) [141].

Seaman, Curran y Shockey (1976) [115] mediante ensayos de impactos de placas a altas velocidades propusieron la siguiente ecuación de crecimiento de fisuras,

$$w(r) = \frac{dr}{dt} = \begin{cases} \min(T_1(\sigma_n - \sigma_c)r, C_R) & \sigma_n \geq \sigma_c \\ 0 & \sigma_n \leq \sigma_c \end{cases} \quad (6)$$

donde,

$T_1$  es una constante del material ( $cm^2/(dina \cdot s)$ )

$\sigma_c$  es la tensión umbral de crecimiento de una grieta de tamaño  $r$  (MPa)

$\sigma_n$  es la tensión normal a la grieta (MPa)

Para materiales frágiles, de acuerdo a la mecánica de la fractura lineal elástica y para grietas de forma circular y plana,  $\sigma_c$  esta ligada para cada tamaño de defecto  $r$  con la tenacidad de la fractura mediante la relación,

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{\pi}{4r}} K_{Ic} \quad (7)$$

obtenida directamente de la ecuación (3)

Expresando la relación (6) en función de la carga aplicada  $\sigma_n$  (y de las propiedades del material) obtenemos la velocidad de crecimiento para cada tamaño de grieta  $r$  mediante,

$$w(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq R_c \\ T_1 \sigma_n (r - \sqrt{R_c} \sqrt{r}) & \text{si } R_c \leq r \leq R_w \\ C_R & \text{si } r \geq R_w \end{cases} \quad (8)$$

Es decir, en cada instante, clasificamos las fisuras en tres grupos de tamaños (véanse Figura 3-1 y Figura 3-2),

1. Un primer grupo de fisuras formado por aquellas fisuras de tamaño inferior a  $R_c$  donde  $R_c$  es el tamaño del defecto crítico para la tensión normal  $\sigma_n$  y viene dado por la ecuación (3).
2. Una segunda categoría de fisuras que crecen de tamaño con una ley parabólica. Este grupo esta formado por las fisuras de tamaño superior a  $R_c$  e inferior a  $R_w$ , donde  $R_w$  es el mínimo tamaño de fisura cuya velocidad de crecimiento es  $C_R$  calculado mediante la ecuación,

$$R_w = \frac{C_R}{T_1 \sigma_n} + \frac{R_c}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4 C_R}{T_1 \sigma_n R_c}} \right) \quad (9)$$

obtenida hallando el valor de  $r$  para el que la ley de crecimiento alcanza el valor  $C_R$ .

3. Aquellas fisuras con tamaño superior a  $R_w$  que crecen a la velocidad de Rayleigh que es la máxima velocidad de propagación de las grietas (dependiente del material).

Más adelante aproximaremos, en el intervalo  $[R_c, R_w]$ , la ley de crecimiento parabólica (6) por una ley de crecimiento lineal,

$$w(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq R_c \\ \frac{C_R}{(R_w - R_c)} (r - R_c) & \text{si } R_c \leq r \leq R_w \\ C_R & \text{si } r \geq R_w \end{cases} \quad (10)$$

En la función FORTRAN **W** incluida en el Apéndice 1 se calcula la velocidad de propagación de las grietas mediante las anteriores ecuaciones.

### 3.4 Población de microfisuras paralelas

A continuación vamos a estudiar la variación de una población de microfisuras circulares con diferentes tamaños (representado por sus radios  $r$ ) pero teniendo todas las fisuras la misma orientación en el espacio. Como se ha dicho anteriormente, cuando un material frágil está sometido a tensiones elevadas, se produce un aumento del tamaño de algunas de las fisuras existentes (crecimiento) y la aparición de nuevas fisuras (nucleación).

Sea  $h(r,t)$  la función que nos da la evolución temporal de la densidad de fisuras (número de fisuras por unidad de volumen de material) para cada tamaño  $r$ .

La ley de conservación de fisuras se expresa mediante la ecuación,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hw)}{\partial r} = \rho_{nuc} \quad (11)$$

donde,

$w(r,t)$  es la velocidad de crecimiento de las fisuras de tamaño  $r$  en el instante  $t$  (cm/s).

$\rho_{nuc}(r,t)$  es la tasa de nucleación de fisuras en el instante  $t$  (número de nuevas fisuras, de tamaño  $r$ , por unidad de tiempo).

Esta fórmula es un caso particular de la ecuación general (92) deducida al final del capítulo 2 si se suprime la dependencia de la orientación espacial de las microfisuras.

Seguir la evolución temporal de la función densidad<sup>1</sup> de fisuras  $h(r,t)$  exigiría gran complejidad y coste computacional. Por ello la idea fundamental es estudiar la evolución temporal de sus momentos estadísticos,

$$M_k(t) \equiv \int_0^\infty r^k h(r,t) dr \quad (k = 0,1,2,\dots) \quad (12)$$

Esta técnica no es extraña en el campo de la estadística, donde es frecuente caracterizar las distribuciones por sus momentos o en situaciones que, como ocurre en nuestro caso, ni siquiera es necesario conocer la distribución sino algunos valores típicos de la misma.

---

<sup>1</sup>Nótese que  $h(r,t)$  no es una verdadera función de densidad en sentido estadístico (véase, por ejemplo, Sixto Ríos (1973) [110]) para lo cual su integral extendida a todos los tamaños de fisuras debería ser unitaria. Con la representación elegida aquí dicha integral es el número total de fisuras y la denominación densidad únicamente se refiere, en sentido estricto, a fisuras por unidad de volumen.

El grado de deterioro o daño de un material causado por una población de microfisuras, habitualmente se considera función del volumen total de los defectos (véase Curran, Seaman y Shockey (1987) [28], pág 351 y sigs.) y otros parámetros de la distribución de defectos pero no de valores concretos de su función densidad.

Dicho volumen es proporcional al momento de tercer orden  $M_3(t)$  de la población de fisuras  $h(r,t)$  cuyo valor es calculado, para cada instante, de una manera directa con el método de representación de la población de microfisuras indicado.

A continuación vamos a detallar el método y como se implementa de una manera efectiva en un programa de ordenador.

Sea  $0 = R_0(t) < R_1(t) < R_2(t) < \dots < R_n(t) < +\infty$  una partición del intervalo de tamaño de fisuras  $[0, +\infty)$  donde los puntos  $R_i(t)$  pueden moverse con la velocidad de crecimiento correspondiente a las fisuras de dicho radio o con una velocidad distinta.

Considerando funciones de peso genéricas  $f_k(r)$  los momentos generalizados  $m_k^{(j)}(t)$  de la función densidad de distribución  $h(r,t)$  en el intervalo  $(R_{j-1}(t), R_j(t))$  vienen dados por,

$$m_k^{(j)}(t) = \int_{R_{j-1}(t)}^{R_j(t)} f_k(r) h(r,t) dr \quad (13)$$

Aplicando la clásica regla de diferenciación de integrales paramétricas (véase por ejemplo, Apostol (1989) [8]) obtenemos la evolución temporal del momento,

$$\begin{aligned} \dot{m}_k^{(j)}(t) \equiv \frac{d m_k^{(j)}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{R_{j-1}(t)}^{R_j(t)} f_k(r) h(r,t) dr = \\ &= \int_{R_{j-1}(t)}^{R_j(t)} f_k(r) \frac{\partial h(r,t)}{\partial t} dr + \dot{r} f_k(r) h(r,t) \Big|_{r=R_{j-1}(t)}^{r=R_j(t)} \end{aligned} \quad (14)$$

Donde se ha representado por  $\dot{r}$  la derivada temporal  $\frac{dr}{dt}$  como es habitual.

Podemos transformar esta última ecuación,

$$\begin{aligned}
 \dot{m}_k^{(j)}(t) = & \int_{R_{j-1}(t)}^{R_j(t)} \left[ f_k(r) \frac{\partial h(r,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (w(r,t) f_k(r) h(r,t)) \right] dr + \\
 & (\dot{r} - w(r,t)) f_k(r) h(r,t) \Big|_{r=R_{j-1}(t)}^{r=R_j(t)} = \\
 & \int_{R_{j-1}(t)}^{R_j(t)} f_k(r) \left[ \frac{\partial h(r,t)}{\partial t} + \frac{\partial (w(r,t) h(r,t))}{\partial r} \right] dr + \\
 & \int_{R_{j-1}(t)}^{R_j(t)} w(r,t) h(r,t) \frac{\partial f_k(r)}{\partial r} dr + (\dot{r} - w(r,t)) f_k(r) h(r,t) \Big|_{r=R_{j-1}(t)}^{r=R_j(t)}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Sustituyendo la ecuación de conservación (11) en el término entre corchetes de la última igualdad obtenemos,

$$\begin{aligned}
 \dot{m}_k^{(j)}(t) = & \int_{R_{j-1}(t)}^{R_j(t)} f_k(r) \rho_{nuc}(r,t) dr + \\
 & \int_{R_{j-1}(t)}^{R_j(t)} \frac{\partial f_k(r)}{\partial r} w(r,t) h(r,t) dr + (\dot{r} - w(r,t)) f_k(r) h(r,t) \Big|_{r=R_{j-1}(t)}^{r=R_j(t)}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Esta ecuación, aplicable a fisuras paralelas, es equivalente a la llamada fórmula del transporte (Abraham, Marsden y Tudors (1988) [2], pág. 469)

Nótese que los términos no integrales de la anterior ecuación se anulan cuando los extremos de integración  $R_{j-1}(t)$  y  $R_j(t)$  se mueven con la velocidad de apertura de las fisuras de dicho tamaño.

Sustituyendo la ecuación (16) para la función de peso  $f_k(r) = r^k$  obtenemos,

$$\begin{aligned}
 \dot{M}_k^{(j)}(t) \equiv \frac{dM_k^{(j)}}{dt} = & \int_{R_{j-1}(t)}^{R_j(t)} r^k \rho_{nuc}(r,t) dr + \\
 & k \int_{R_{j-1}(t)}^{R_j(t)} r^{k-1} w(r,t) h(r,t) dr + (\dot{r} - w(r,t)) r^k h(r,t) \Big|_{r=R_{j-1}(t)}^{r=R_j(t)}
 \end{aligned} \tag{17}$$

Sumando la anterior ecuación en el índice  $j$  se obtiene,

$$\dot{M}_k(t) \equiv \frac{dM_k(t)}{dt} = \int_0^\infty r^k \rho_{nuc}(r,t) dr + k \int_0^\infty r^{k-1} w(r,t) h(r,t) dr \tag{18}$$

La anterior fórmula nos daría la evolución de  $M_k(t)$  si los momentos del producto  $w(r,t)h(r,t)$  se pudiesen calcular a partir de los momentos de  $h(r,t)$ . Sin embargo es muy difícil calcular dichos momentos, al menos desde un punto de vista computacional.



Para obviar la anterior dificultad, escogemos una partición  $R_j(t)$  del intervalo de tamaños de fisuras adecuado a las condiciones de nuestro estudio.

Elegiremos la partición  $R_0 = 0$ ,  $R_1(t) = R_c(t)$ ,  $R_2(t) = R_w(t)$ ,  $R_3(t) = R_f(t)$  y  $R_4(t) = +\infty$  donde para cada instante

$R_c$  es el tamaño de defecto crítico

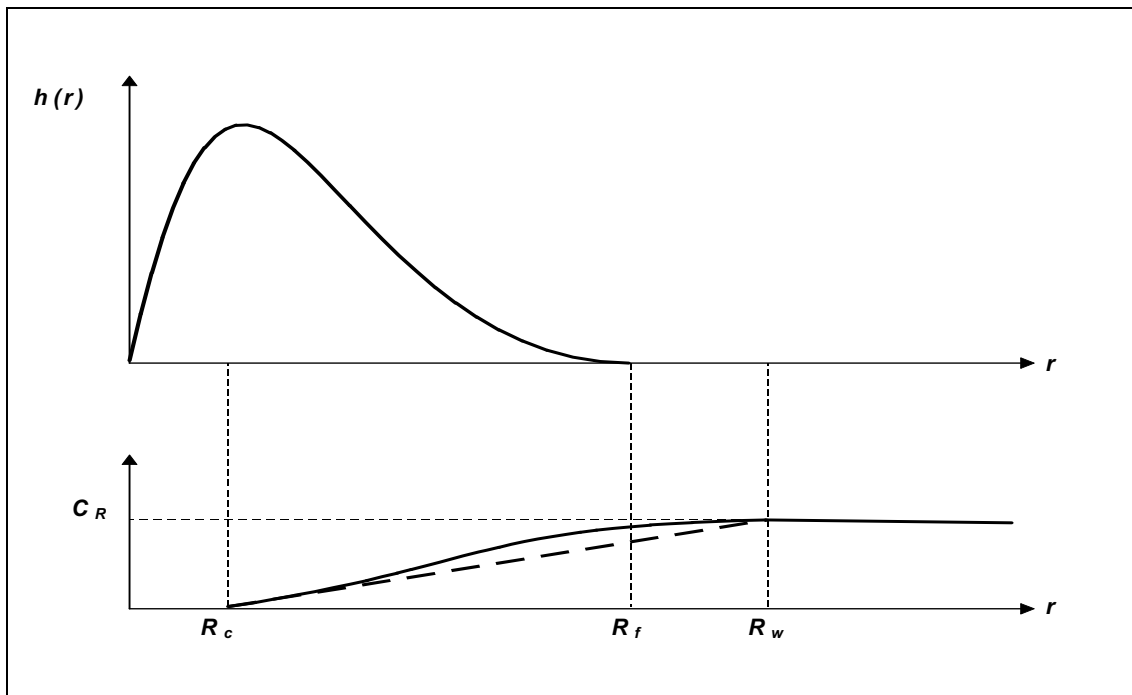
$R_w$  mínimo tamaño de fisura cuya velocidad de crecimiento es máxima

$R_f$  tamaño máximo de las fisuras

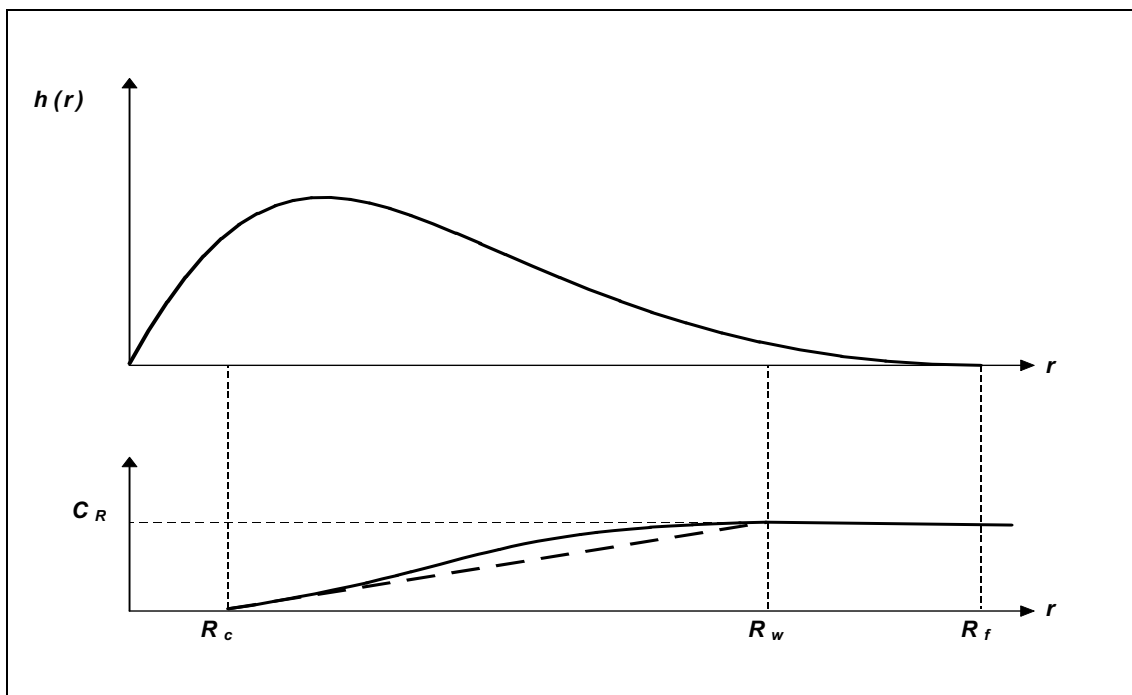
y  $R_c$  y  $R_w$  dependen sólo de la tensión normal aplicada  $\sigma_n(t)$  en dicho instante y de las características del material.

Vamos a continuación a plantear la evolución de los momentos de la distribución de fisuras en cada uno de los intervalos para dos casos posibles (véanse Figura 3-1 y Figura 3-2):

- Poblaciones de fisuras cuyo tamaño máximo  $R_f$  es inferior a  $R_w$
- Poblaciones de fisuras cuyo tamaño máximo  $R_f$  es superior a  $R_w$



**Figura 3-1** Población de microfisuras cuyo tamaño máximo es inferior a  $R_w$



**Figura 3-2** Población de microfisuras cuyo tamaño máximo es superior a  $R_w$

### 3.4.1 Poblaciones de fisuras de tamaño $R_f$ inferior a $R_w$

Si en una población de fisuras el tamaño máximo de fisura  $R_f$  es inferior al correspondiente a la velocidad de Rayleigh  $R_w$  (dado por la ecuación (9)) consideramos dos intervalos de tamaños:  $[0, R_c(t)]$  y  $[R_c(t), R_f(t)]$ . Estos dos intervalos corresponden, respectivamente, a las fisuras cuyo tamaño no varía y a aquellas que crecen.

#### Tramo I. Sin crecimiento ni nucleación de fisuras

Para tamaños de fisura  $r$  inferiores al tamaño crítico  $R_c$ , o sea, si  $r \in [0, R_c(t)]$  no se produce nucleación ni crecimiento de fisuras (véanse ecuaciones (2) y (8) en páginas 51 y 54 respectivamente). El tamaño crítico  $R_c$  en cada instante, viene dado por el nivel de tensión normal al plano de las fisuras y satisface la ecuación (3).

Particularizando la ecuación (17) a este caso con  $\rho_{nuc}(r, t) = 0$  y  $w(r, t) = 0$  obtenemos,

$$\dot{M}_k^I(t) = \dot{R}_c R_c^k h(R_c, t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (19)$$

#### Tramo II. Crecimiento de fisuras con velocidad inferior a la máxima y nucleación

Para tamaños de fisura  $r$  superiores a  $R_c$  e inferiores al tamaño correspondiente a la velocidad de Rayleigh, supondremos leyes de crecimiento de tipo lineal y parabólico.

Más concretamente, consideraremos tamaños  $r \in [R_c(t), R_f(t)]$  dado que el tamaño máximo de las fisuras  $R_f$  es inferior a  $R_w$

La tasa de incremento del número de fisuras en dicho intervalo de tamaños, que es la variación temporal del momento de orden cero, se deduce a partir de la ecuación (17) teniendo en cuenta que las fisuras de tamaño  $R_f$  crecen con velocidad  $\dot{R}_f = w(R_f, t)$ . Su expresión viene dada por,

$$\dot{M}_0^{II}(t) = Nuc_0^{II}(t) - \dot{R}_c h(R_c, t) \quad (20)$$

donde hemos simbolizado por  $Nuc_0^{II}(t)$  a la integral  $\int_{R_c(t)}^{R_f(t)} \rho_{nuc}(r, t) dr$  que representa la tasa de fisuras nucleadas en el tramo II

La ecuación diferencial de los momentos de orden superior, depende del tipo de ley de crecimiento de fisuras:

- *Ley de crecimiento lineal*

Denominando  $a(t) = \frac{C_R}{(R_w - R_c)}$ , la ley lineal de crecimiento de fisuras en este tramo se expresa mediante  $w(r,t) = a(t)(r - R_c)$  (véase ecuación (10)). Esta ley sustituida en la ecuación (17) nos da la variación de los momentos de la función densidad de fisuras,

$$\dot{M}_k^{II}(t) = Nuc_k^{II}(t) + a(t)k \left( M_k^{II}(t) - R_c M_{k-1}^{II}(t) \right) - \dot{R}_c R_c^k h(R_c, t) \quad (21)$$

$(k = 1, 2, \dots)$

donde  $Nuc_k^{II}(t) = \int_{R_c(t)}^{R_f(t)} r^K \rho_{nuc}(r, t) dr$  representa la variación del momento de las fisuras nucleadas en el intervalo  $[R_c(t), R_f(t)]$ . Este momento se calcula mediante la función gamma incompleta en la rutina Fortran **RNUC** (véase Apéndice 1)

- *Ley de crecimiento parabólico*

Denominando  $b(t) = T_1 \sigma_n$ , la ley lineal de crecimiento de fisuras en este tramo se expresa mediante  $w(r,t) = b(t)(r - \sqrt{R_c} r^{1/2})$  (véase ecuación (8)). Esta ley sustituida en la ecuación (17) nos da la variación de los momentos de la función densidad de fisuras,

$$\dot{M}_k^{II}(t) = Nuc_k^{II}(t) + b(t)k \left( M_k^{II}(t) - \sqrt{R_c} M_{k-1/2}^{II}(t) \right) - \dot{R}_c R_c^k h(R_c, t) \quad (22)$$

$(k = 1/2, 1, 3/2, 2, \dots)$

Nótese que en este caso intervienen, además de los momentos enteros, momentos semienteros de la función densidad de fisuras.

Sumando las ecuaciones de variación de los momentos en los tramos I y II obtenemos la ecuación diferencial del número total de fisuras  $\dot{M}_0(t) = Nuc_0(t)$ , que es la tasa de nucleación de fisuras en el intervalo  $[0, R_f(t)]$ , y la variación temporal de los momentos de orden superior a cero,

$$\dot{M}_k(t) = Nuc_k(t) + a(t)k \left( M_k^{II}(t) - R_c M_{k-1}^{II}(t) \right) \quad (23)$$

$(k = 1, 2, \dots)$

para la ley de crecimiento lineal, y

$$\dot{M}_k(t) = Nuc_k(t) + b(t)k \left( M_k^{II}(t) - \sqrt{R_c} M_{k-1/2}^{II}(t) \right) \quad (24)$$

$(k = 1/2, 1, 3/2, 2, \dots)$

para la ley de crecimiento parabólico.

### 3.4.2 Poblaciones de fisuras de tamaño $R_f$ superior a $R_w$

Para poblaciones de fisuras de un tamaño máximo de fisura  $R_f$  superior al correspondiente a la velocidad de Rayleigh  $R_w$  consideramos tres intervalos de tamaños:  $[0, R_c(t)]$ ,  $[R_c(t), R_w(t)]$ . y  $[R_w(t), R_f(t)]$ . Estos tres intervalos corresponden, respectivamente, a las fisuras cuyo tamaño no varía, aquellas que crecen con velocidad inferior a la máxima  $C_R$  y las que crecen con la velocidad máxima  $C_R$ .

#### Tramo I. Sin crecimiento ni nucleación de fisuras

Para tamaños de fisura  $r$  inferiores al tamaño crítico  $R_c$ , o sea, si  $r \in [0, R_c(t)]$  no se produce nucleación ni crecimiento de fisuras y la variación de los momentos de este tramo es la misma indicada en el apartado anterior (véase ecuación (19))

#### Tramo II. Crecimiento de fisuras con velocidad inferior a la máxima y nucleación

Para tamaños de fisura  $r$  comprendidos entre  $R_c$  y  $R_w$  supondremos leyes de crecimiento de tipo lineal y parabólico.

Si  $r \in [R_c(t), R_w(t)]$  la tasa de incremento del número de fisuras en dicho intervalo de tamaños viene dada por la siguiente fórmula deducida a partir de la ecuación (17),

$$\dot{M}_0''(t) = Nuc_0''(t) + (\dot{R}_w - C_R)h(R_w, t) - \dot{R}_c h(R_c, t) \quad (25)$$

donde hemos tenido en cuenta que las fisuras de tamaño  $R_w$  crecen con velocidad  $C_R$  (véase ecuación (8))

La ecuación diferencial de los momentos de orden superior, depende del tipo de ley de crecimiento de fisuras y se incluye a continuación:

- *Ley de crecimiento lineal*  $w(r, t) = a(t)(r - R_c)$

$$\begin{aligned} \dot{M}_k''(t) = Nuc_k''(t) + a(t)k \left( M_k''(t) - R_c M_{k-1}''(t) \right) + \\ (\dot{R}_w - C_R) R_w^k h(R_w, t) - \dot{R}_c R_c^k h(R_c, t) \end{aligned} \quad (26)$$

$(k = 1, 2, \dots)$

- Ley de crecimiento parabólico  $w(r,t) = b(t)(r - \sqrt{R_c} r^{1/2})$

$$\begin{aligned} \dot{M}_k^{II}(t) = Nuc_k^{II}(t) + b(t)k \left( M_k^{II}(t) - \sqrt{R_c} M_{k-1/2}^{II}(t) \right) + \\ (\dot{R}_w - C_R) R_w^k h(R_w, t) - \dot{R}_c R_c^k h(R_c, t) \quad (27) \\ (k = 1/2, 1, 3/2, 2, \dots) \end{aligned}$$

### Tramo III. Crecimiento de fisuras con la velocidad máxima y nucleación

Para tamaños  $r \in [R_w(t), R_f(t)]$  las fisuras crecen con la velocidad de Rayleigh  $C_R$  y la tasa de variación del momento en este tramo viene dado por las ecuaciones,

$$\dot{M}_0^{III}(t) = Nuc_0^{III}(t) - (\dot{R}_w - C_R) h(R_w, t) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_k^{III}(t) = Nuc_k^{III}(t) + k C_R M_{k-1}^{III}(t) - (\dot{R}_w - C_R) R_w^k h(R_w, t) \\ (k = 1, 2, 3 \dots) \end{aligned} \quad (29)$$

obtenida de la ecuación (17) con  $\dot{R}_f = C_R$  y  $Nuc_k^{III}(t)$  representa la variación del momento producido por las fisuras nucleadas en este tramo de tamaños.

Sumando las ecuaciones de variación de los momentos en tres tramos, obtenemos la ecuación diferencial del número total de fisuras  $\dot{M}_0(t) = Nuc_0(t)$ , que es la tasa de nucleación de fisuras en el intervalo  $[0, R_f(t)]$ , y la variación temporal de los momentos de orden superior a cero,

$$\begin{aligned} \dot{M}_k(t) = Nuc_k(t) + a(t)k \left( M_k^{II}(t) - R_c M_{k-1}^{II}(t) \right) + k C_R M_{k-1}^{III}(t) \\ (k = 1, 2, 3 \dots) \end{aligned} \quad (30)$$

para la ley de crecimiento lineal, y

$$\begin{aligned} \dot{M}_k(t) = Nuc_k(t) + b(t)k \left( M_k^{II}(t) - \sqrt{R_c} M_{k-1/2}^{II}(t) \right) + k C_R M_{k-1}^{III}(t) \\ (k = 1/2, 1, 3/2, 2, \dots) \end{aligned} \quad (31)$$

para la ley de crecimiento parabólico.

### 3.5 Evaluación de la función densidad de fisuras

Para seguir la evolución temporal de los momentos estadísticos de la población de fisuras (véanse ecuaciones (19) a (22) y (25) a (29)), es necesario calcular el valor de la función densidad de fisuras  $h(r, t)$  en los puntos  $r = R_c(t)$  y  $r = R_w(t)$  para cada paso de integración.

Como se ha indicado anteriormente, la función  $h(r, t)$  expresa, en cada instante  $t$  el número de fisuras de tamaño  $r$  por unidad de volumen de material y está definida en el intervalo  $[0, R_f(t)]$ .

Esta función no es conocida explícitamente, sino a través de sus momentos<sup>2</sup> respecto al origen,

$$M_k(t) \equiv \int_0^{R_f(t)} r^k h(r, t) dr \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (32)$$

La determinación de una función de distribución a partir de sus momentos enteros es conocido históricamente como “problema de los momentos” y fue resuelto para el caso de un intervalo finito por Hausdorff en 1923 [59].

Las publicaciones de Shohat y Tamarin (1943) [119] y Aheizer y Krein (1962) [6] entre otras, tratan el problema de los momentos en profundidad, no existiendo apenas referencias posteriores a dicho tema.

A continuación se detallan dos métodos para evaluar la densidad de fisuras  $h(r, t)$  a partir de sus momentos :

- Aproximación mediante distribuciones de máxima entropía
- Aproximación polinómica

#### 3.5.1 Distribuciones de máxima entropía

Claude Shannon, un ingeniero de Bell Telephone Laboratories introdujo en su célebre artículo sobre teoría matemática de la información (Shannon (1948) [117]), el concepto de entropía como una medida de la información, o mejor dicho de la carencia de información o incertidumbre.

Según Shanon, la incertidumbre de una distribución de probabilidad discreta, viene dada por la expresión :

$$S(p_1, p_2, \dots, p_n) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) \quad (33)$$

<sup>2</sup>En este apartado consideramos únicamente momentos enteros aunque podría generalizarse sin dificultad para incluir momentos semienteros.

donde

$S$  es la entropía

$p_1, p_2, \dots, p_n$  son las probabilidades de los  $n$  valores que puede tomar la variable aleatoria.

siendo  $p_i \geq 0$  y  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

La ecuación anterior coincide con la expresión de la entropía termodinámica, lo cual explica el nombre elegido por Shanon.

Distribuciones de probabilidad distintas, tienen asociadas mediante la ecuación (33) distintos grados de incertidumbre.

Por ejemplo, se ve fácilmente que la incertidumbre (o entropía) de la distribución de probabilidad  $(1/2, 1/2)$  de que al tirar una moneda salga cara o cruz es menor que la de ganar o perder en la lotería  $(1/100000, 99999/100000)$ .

Posteriormente Jaynes (1957) [64] dedujo importantes distribuciones de probabilidad en el campo de la mecánica estadística, mediante maximización, sujeta a restricciones de sus momentos, de la medida de Shanon. Su método es conocido como Principio de Máxima Entropía de Jaynes.

En el caso de distribuciones continuas, si  $x$  es una variable aleatoria con función de densidad,

$$p(x) = \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in [a, b] \\ = 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (34)$$

se puede generalizar el concepto de entropía del caso definido para variables discretas mediante la siguiente expresión

$$S(p) = - \int_a^b p(x) \ln(p(x)) dx \quad (35)$$

Frecuentemente, de un proceso no conocemos la distribución que sigue, pero tenemos información del mismo en forma, por ejemplo, de la esperanza (o momentos)  $E(f_1(x)), E(f_2(x)), \dots, E(f_n(x))$  de funciones de las variables aleatorias con las que describimos el fenómeno. Ejemplo de estas esperanzas matemáticas son la media  $\bar{x} = E(x)$  y la varianza  $\sigma^2 = E[(x - \bar{x})^2]$  que en



el caso de funciones continuas se expresan como,  $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$  y  $E[(x - \bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 p(x) dx$  respectivamente.

El principio de Máxima Entropía tiene varias aplicaciones en el campo de la estadística y la mayoría de las distribuciones de probabilidad, se pueden obtener mediante maximización de la entropía suponiendo conocidos algunos de sus momentos. Por ejemplo sobre el intervalo  $(-\infty, +\infty)$  la distribución normal es de máxima entropía cuando se fijan la media y la varianza y la distribución de Laplace es de máxima entropía si suponemos conocido  $E(|x|)$  (Kapur y Kesavan (1992) [69] pág. 65 a 69)

El Principio de Máxima Entropía de Janes, nos permite seleccionar entre todas las distribuciones de probabilidad que cumplen las condiciones conocidas de nuestro objeto en estudio, aquella distribución que tiene máxima entropía.

¿No es paradójico maximizar la incertidumbre siendo nuestro objetivo reducir la ignorancia de nuestro fenómeno físico en estudio?.

Ahora bien, siendo honestos debemos usar toda la información que tenemos pero aceptar la máxima incertidumbre respecto a la información de que no disponemos.

En nuestro caso la función de probabilidad está definida en el intervalo  $(0, R_i(t))$  y está caracterizada por los valores  $a_1, a_2, \dots, a_n$  de sus momentos  $E(f_1(x))$ ,  $E(f_2(x))$ , ...,  $E(f_n(x))$ . La distribución de máxima entropía que cumple las anteriores condiciones viene dada por (véanse Kapur y Kesavan (1992) [69] pág. 134 y siguientes y el artículo de Mukherjee y Hurst (1984) [88]),

$$p(x) = e^{-\lambda_0 - \lambda_1 f_1(x) - \lambda_2 f_2(x) - \dots - \lambda_n f_n(x)} \quad (36)$$

donde los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_i$  se determinan mediante las ecuaciones,

$$\begin{aligned} \int_0^{R_i(t)} p(x) dx &= 1 & y \\ \int_0^{R_i(t)} f_k(x) p(x) dx &= a_k & (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (37)$$

Si se dispone de cualquier otra información de la distribución que no se deduzca de las anteriores relaciones obtendríamos una función de distribución diferente. Las funciones  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  determinan una familia de distribuciones de máxima entropía y si además conocemos los valores  $a_1, a_2, \dots, a_n$  seleccionamos una distribución concreta de la familia.

### 3.5.2 Aproximación mediante distribuciones de máxima entropía

En nuestro caso la función densidad de fisuras  $h(r, t)$  en cada instante  $t$ , está caracterizada por el valor de los  $n$  primeros momentos enteros,

$$M_k(t) \equiv \int_0^{R_f(t)} r^k h(r, t) dr \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (38)$$

y la función densidad de fisuras de máxima entropía queda definida por,

$$h(r, t) = e^{-\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j(t) r^j} \quad (39)$$

donde los parámetros de la distribución  $\lambda_0(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_{n-1}(t)$  vienen dados por los valores de los momentos  $M_k(t)$  para  $k=0, 1, \dots, n-1$ .

Como se concretará más adelante, la evolución temporal de los momentos  $M_k(t)$  se planteará mediante un sistema de ecuaciones diferenciales y por ello a continuación, vamos a determinar la variación temporal de los parámetros de la función densidad de fisuras en función de la variación de sus momentos.

Diferenciando respecto a  $t$  la ecuación (38) obtenemos,

$$\dot{M}_k(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial M_k}{\partial \lambda_j} \dot{\lambda}_j(t) + \frac{\partial M_k}{\partial R_f} \dot{R}_f(t) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (40)$$

donde hemos representado por  $\dot{M}_k$  y  $\dot{R}_f$  las derivadas temporales,  $\frac{d M_k}{d t}$  y  $\frac{d R_f}{d t}$  como es habitual.

Sustituyendo,

$$\frac{\partial M_k}{\partial \lambda_j} = - \int_0^{R_f} r^{k+j} e^{-\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j(t) r^j} dr = -M_{k+j} \quad (41)$$

y

$$\frac{\partial M_k}{\partial R_f} = r^k e^{-\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j(t) r^j} \Big|_0^{R_f} = R_f^k h(R_f, t) \quad (42)$$

donde la segunda relación corresponde a la regla de diferenciación de una integral paramétrica, obtenemos,

$$\sum_{j=0}^{n-1} M_{k+j} \dot{\lambda}_j = R_f^k h(R_f, t) \dot{R}_f - \dot{M}_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (43)$$

que expresado matricialmente queda,

$$\begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \cdots & M_k & \cdots & M_{n-1} \\ M_1 & M_2 & \cdots & M_{k+1} & \cdots & M_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_k & M_{k+1} & \cdots & M_{2k} & \cdots & M_{k+n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n-1} & M_n & \vdots & M_{k+n-1} & \cdots & M_{2(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \dot{\lambda}_k \\ \vdots \\ \dot{\lambda}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(R_f, t) \dot{R}_f - \dot{M}_0 \\ R_f h(R_f, t) \dot{R}_f - \dot{M}_1 \\ \vdots \\ R_f^k h(R_f, t) \dot{R}_f - \dot{M}_k \\ \vdots \\ R_f^{n-1} h(R_f, t) \dot{R}_f - \dot{M}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (44)$$

o en forma más compacta  $[D]\{\dot{\lambda}\} = \{b\}$  de donde podemos despejar  $\{\dot{\lambda}\} = [D]^{-1}\{b\}$  y la variación temporal de los parámetros de la función densidad de fisuras en cada instante  $t$  en función de:

- el valor de los momentos y su tasa de variación
- el tamaño de fisura máximo y su variación temporal
- el valor de la función densidad de fisuras correspondiente al tamaño máximo de fisuras

y por lo tanto calcular la función densidad de fisuras en cada instante  $t+\Delta t$  a partir de la correspondiente al instante  $t$  anterior.

### 3.5.3 Aproximación mediante polinomios de Chebyshev

Sea  $f(x)$  una función definida en un intervalo  $(a,b)$  que deseamos aproximar mediante una combinación lineal de polinomios  $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ , hasta orden  $n$ ,

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^n a_i P_i(x) \quad (45)$$

Existen diferentes familias de polinomios que podemos considerar en la aproximación como los polinomios de Legendre, Bernstein, Chebyshev, etc.

Consideramos para este estudio polinomios de Chebyshev, convenientemente desplazados al intervalo de aproximación, por sus buenas características de convergencia.

Aunque teóricamente la convergencia es cuadrática (en el conjunto de los  $n$  puntos del intervalo que son los ceros del  $n$ -ésimo polinomio) en la práctica el comportamiento de la aproximación es de convergencia uniforme. El error máximo de la aproximación, en valor absoluto, viene dado básicamente por el coeficiente  $a_{n+1}$  del primer polinomio de Chebyshev  $P_{n+1}(x)$  no considerado en la aproximación y dichos coeficientes decrecen rápidamente con el orden del polinomio (véase Korn y Korn (1961) [72] págs 755 y sigs.).

A continuación, vamos a aproximar la población de fisuras mediante polinomios de Chebyshev con la condición de que la función densidad de fisuras, desconocida y su aproximación tengan los primeros momentos enteros iguales.

Aplicando a la (38) el cambio de variable  $r = xR_f$  obtenemos,

$$M_k(t) = R_f^{k+1}(t) \int_0^1 x^k H(x,t) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (46)$$

donde

$$H(x,t) = h(r,t) \quad (47)$$

Aproximamos  $H(x,t)$  como una combinación lineal de  $n$  polinomios de Chebyshev

$$H(x,t) = \sum_{j=0}^{n-1} h_j(t) T_j^*(x) \quad (48)$$

donde  $T_j^*(x)$  es el polinomio de Chebyshev de orden  $j$  en el intervalo  $[0,1]$

Los  $n$  coeficientes  $h_j$ , en cada instante  $t$ , se obtienen igualando los  $n$  primeros momentos enteros de  $h(r,t)$ , es decir,

$$m_k(t) = \frac{M_k(t)}{R_f^{k+1}(t)} = \int_0^1 x^k \sum_{j=0}^{n-1} h_j(t) T_j^*(x) dx = \sum_{j=0}^{n-1} h_j(t) \int_0^1 x^k T_j^*(x) dx = \sum_{j=0}^{n-1} a_{kj} h_j(t) \quad (49)$$

siendo  $a_{kj}$  el momento  $k$ -ésimo del polinomio  $T_j^*(x)$

Expresado en forma matricial,

$$\{m\} = [A]\{h\} \quad (50)$$

donde,

$\{m\}$  es un vector columna cuyos elementos son los momentos "reducidos" de la distribución  $h(r,t)$

$[A]$  es una matriz cuadrada, cuyos términos son momentos de polinomios de Chebyshev

$\{h\}$  vector columna que nos determina los coeficientes de la aproximación de la función  $H(x,t)$

La matriz  $[A]$  no depende del tiempo y por lo tanto sólo es necesario calcular su inversa inicialmente.

Con ello, el calculo de los coeficientes  $h_j(t)$  en cada instante, se obtiene directamente, multiplicando una matriz por el vector momentos "reducidos".

$$\{h\} = [A]^{-1} \{m\} \quad (51)$$

### 3.5.4 Cálculo de los momentos de los polinomios de Chebyshev

Hemos visto en el apartado anterior, que para obtener una aproximación de la función densidad de fisuras a partir de sus momentos, es necesario calcular la inversa de una matriz cuyos términos son los momentos de los polinomios de Chebyshev en el intervalo  $[0,1]$ . Por ello en este apartado vamos a deducir las ecuaciones necesarias para su cálculo.

El polinomio de Chebyshev de orden  $j$  definido en el intervalo  $[-1,1]$  viene dado por (véase, por ejemplo, Press, William H., et. al. (1992) [103], págs. 184 a 192),

$$T_j(y) \equiv \cos(j \cos^{-1}(y)) \equiv \cos(j\theta) , \quad \cos \theta = y \quad (52)$$

que puede ser transformado mediante identidades trigonométricas en las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} T_0(y) &= 1 \\ T_1(y) &= y \\ T_2(y) &= 2y^2 - 1 \\ T_3(y) &= 4y^3 - 3y \\ T_4(y) &= 8y^4 - 8y^2 + 1 \\ &\dots\dots\dots \\ T_{j+1}(y) &= 2yT_j(y) - T_{j-1}(y) \quad (j \geq 1) \end{aligned} \quad (53)$$

Haciendo el cambio  $y = 2x - 1$  para transformar los polinomios  $T_j(y)$  en polinomios de Chebyshev  $T_j^*(x)$  definidos en el intervalo  $[0,1]$  obtenemos

$$T_j^*(x) \equiv \cos(j \cos^{-1}(x)) \equiv \cos(j\theta) \quad \text{con} \quad \cos \theta = 2x - 1 \quad (54)$$

$$\begin{aligned} T_0^*(x) &= 1 \\ T_1^*(x) &= 2x - 1 \\ &\dots\dots\dots \\ T_{j+1}^*(x) &= 2(2x - 1)T_j^*(x) - T_{j-1}^*(x) \quad (j \geq 1) \end{aligned} \quad (55)$$

El momento  $i$ -ésimo del polinomio de Chebyshev de orden  $j$   $T_j^*(x)$  viene dado por la siguiente expresión ,

$$a_{ij} = \int_0^1 x^i T_j^*(x) dx \quad (i, j \geq 0) \quad (56)$$

cuyos valores se pueden determinar mediante las ecuaciones ,

$$a_{i0} = \int_0^1 x^i T_0^*(x) dx = \frac{1}{i+1} \quad (i \geq 0) \quad (57)$$

$$a_{01} = \int_0^1 T_1^*(x) dx = 0$$

$$a_{0j} = \int_0^1 T_j^*(x) dx \quad (j \geq 2) \quad (58)$$

Sustituyendo la ecuación (54) en la anterior relación obtenemos,

$$a_{0j} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(j\theta) \sin(\theta) d\theta \quad (59)$$

que integrando por partes con  $du = \cos(j\theta) d\theta$  y  $v = \sin(\theta)$  nos queda,

$$a_{0j} = \frac{1}{2j} \left( \sin(j\theta) \sin(\theta) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin(j\theta) \cos(\theta) d\theta \right) = -\frac{1}{2j} \int_0^\pi \sin(j\theta) \cos(\theta) d\theta \quad (60)$$

lo cual integrado otra vez por partes con los cambios  $du = \sin(j\theta) d\theta$  y  $v = \cos(\theta)$  obtenemos,

$$a_{0j} = \frac{1}{2j^2} \left( \cos(j\theta) \cos(\theta) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos(j\theta) \sin(\theta) d\theta \right) \quad (61)$$

en donde sustituyendo la integral por su valor  $2a_{0j}$  según la ecuación (59) obtenemos,

$$a_{0j} = \frac{(-1)^{j+1} - 1}{2(j^2 - 1)} = \begin{cases} 0 & j = 3, 5, 7, \dots \text{(impar)} \\ \frac{1}{1 - j^2} & j = 2, 4, 6, \dots \text{(par)} \end{cases} \quad (62)$$

Para calcular los valores  $a_{ij}$  para  $i, j \geq 1$  se emplea la recurrencia de generación de polinomios de Chebyshev (ecuación (55)) la cual multiplicada por  $x^{i-1}$  e integrada en el intervalo  $[0,1]$  nos permite obtener,

$$\int_0^1 x^i T_j^*(x) dx = \frac{1}{4} \left( \int_0^1 x^{i-1} T_{j+1}^*(x) dx + \int_0^1 x^{i-1} T_{j-1}^*(x) dx + 2 \int_0^1 x^{i-1} T_j^*(x) dx \right) \quad (63)$$

en la que sustituyendo las integrales, momentos de polinomios de Chebyshev, por su valor según la ecuación (56) nos da la recurrencia,

$$a_{ij} = \frac{1}{4} (a_{i-1,j+1} + 2a_{i-1,j} + a_{i-1,j-1}) \quad (i, j \geq 1) \quad (64)$$

que junto a las ecuaciones (57) y (62) nos permite calcular los términos de la matriz  $[A]$  del apartado anterior.

### 3.6 Volumen de microfisuras

Supondremos que las fisuras sometidas a una tensión de tracción  $\sigma$  abren elásticamente a un valor  $\delta$  dado por Sneddon y Lowengrub [127],

$$\delta = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} r \sigma_n \quad (65)$$

donde

$r$	tamaño de la microfisura ( $m$ )
$\delta$	mitad de la separación de las caras de la microfisura ( $m$ )
$E$	módulo de elasticidad ( $MPa$ )
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\sigma_n$	tensión normal al plano de la microfisura ( $MPa$ )

La apertura elástica de la microfisura significa que cuando la tensión normal es de compresión la microfisura se cierra, y se abre, instantáneamente, cuando la tensión es de tracción. Comportamientos de apertura viscoelástica o viscoplástico podrían incorporarse al modelo en desarrollos futuros.

Una grieta circular sometida a tracción en un medio elástico adopta una forma elipsoidal de semiejes  $\delta$ ,  $r$  y  $r$  y por lo tanto su volumen viene dado por la expresión,

$$V = \frac{4}{3} \pi r^2 \delta = \frac{16(1-\nu^2) r^3 \sigma_n}{3E} \quad (66)$$



El volumen total de microfisuras se puede obtener en cada instante mediante integración del volumen de cada microfisura de la población,

$$V_f(t) = \int_0^{R_f} V(t) h(r, t) dr = \frac{16(1-\nu^2)}{3E} \sigma_n(t) \int_0^{R_f} r^3 h(r, t) dr \quad (67)$$

observando que la integral del último término es el momento de tercer orden de la población de microfisuras, que hemos representado por  $M_3(t)$ , obtenemos,

$$\begin{aligned} V_f(t) &= \frac{16(1-\nu^2)}{3E} \sigma_n(t) M_3(t) & (\sigma_n > 0, \text{ tracción}) \\ V_f(t) &= 0 & (\sigma_n < 0, \text{ compresión}) \end{aligned} \quad (68)$$

### 3.7 Implementación computacional

El objeto de este apartado es mostrar la viabilidad del método propuesto y la posibilidad de implementación de este modelo de material fisurable en un programa de elementos finitos (o diferencias finitas) de propósito general.

Para ello se han desarrollado una serie de programas de cálculo por ordenador que implementan el método anteriormente descrito. Aunque estas rutinas no se han incorporado a un programa de análisis tensional se indica claramente la manera de hacerlo.

En el Apéndice 1 se incluye un listado de los programas referenciados que pueden ser seguidos sin dificultad con las explicaciones incluidas en este capítulo.

Al final del apartado se incluye un cuadro resumen de lo expuesto a continuación que tiene como finalidad su comprensión y facilitar su implementación en un programa de análisis tensional dinámico.

#### 3.7.1 Integración temporal de las ecuaciones de movimiento

La gran mayoría de los programas de ordenador de análisis tensional en dinámica de estructuras se plantea, en los nudos de la discretización espacial y en cada instante temporal  $t$ , el equilibrio de fuerzas

$$M\ddot{a} = P - F \quad (69)$$

donde,

- M es la matriz de masas (habitualmente diagonal)
- P vector de cargas exteriores y de fuerzas de masa
- F divergencia del tensor de tensiones
- $\ddot{a}$  vector de aceleraciones de los nudos

y por lo tanto las incógnitas principales son las aceleraciones de los nudos.

A partir de las aceleraciones mediante algún método numérico de integración (de tipo implícito para fenómenos de dinámica lenta como en los programas ANSYS [7], NASTRAN [91], NIKE [80], COSMOS (60), SAP, NONSAP, ADINA [5], etc. o explícito como en DYNA [57],[56],[58]) se calculan las velocidades (y los desplazamientos) de los nodos.

El método de integración en concreto depende de cada programa (e incluso un mismo programa implementa varios métodos) y aquí, como no es esencial para la exposición del modelo, no vamos a presentar ninguno específico. Como ejemplo en el apartado 6.4.5 del capítulo 4 se puede ver el método implementado en el programa DYNA para la integración de las ecuaciones del movimiento.

### 3.7.2 Cálculo de deformaciones

A partir de las velocidades de los nudos podemos determinar,

$$(\text{grad } \vec{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (70)$$

en cualquier punto de los elementos de discretización del continuo a partir de sus funciones de forma (véanse detalles en el apartado 6.1 del capítulo 4).

De la anterior relación pueden calcularse el tensor velocidad de deformación  $\dot{\epsilon}$  y el tensor de rotación  $\omega$  en el centro de los elementos (o en los puntos de integración de Gauss en caso de ordenes de integración mayores) mediante las siguientes ecuaciones,

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (71)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (72)$$

### 3.7.3 Leyes constitutivas del material sin fisurar

Las leyes constitutivas de los materiales relacionan tensiones y deformaciones y suelen expresarse mas convenientemente, desde el punto de vista computacional, como relaciones entre velocidades de deformación y ritmos de tensión.

Las leyes constitutivas de los materiales con comportamiento elástico, elasto-plástico y de los materiales geológicos (hipoelásticos) sin fisuración se pueden expresar mediante,

$$\hat{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (73)$$

donde  $\hat{\sigma}_{ij}$  es el tensor de Jaumann (Jaumann (1911) [63], pág. 385-530) que es un ritmo objetivo del tensor de tensiones (véase ecuación (53) del capítulo 2) y  $C_{ijkl}$  es el tensor constitutivo del material dependiente, en general, del tensor de tensiones.

La tensión se integra incrementalmente en el tiempo mediante la relación,

$$\sigma(t + \Delta t) = \sigma(t) + \dot{\sigma}(t) \Delta t \quad (74)$$

donde  $\dot{\sigma}$  es la derivada material del tensor de tensiones dada por (véase ecuación (53) del capítulo 2),

$$\dot{\sigma} = \hat{\sigma} + \omega \cdot \sigma - \sigma \cdot \omega \quad (75)$$

### 3.7.4 Leyes constitutivas del material fisurado

En el caso de materiales fisurados asumimos que cada elemento de material está formado de una parte de material sólido (intacto, sin fisurar) y otra parte de material, cerca de las fisuras, de resistencia muy reducida. Por ello consideraremos dos tipos de tensiones y deformaciones:

- tensión y deformación en el sólido que representamos sin superíndice ( $\sigma, \varepsilon$ )
- tensión y deformación aparentes que representaremos con el superíndice  $a$  ( $\sigma^a, \varepsilon^a$ )

Las tensiones y deformaciones aparentes (o globales) son los valores promedio en el material (compuesto de material sólido y de material fisurado) y son las que actúan entre los elementos de la discretización y por lo tanto a las que se deben incluir en la ecuación de equilibrio de fuerzas en nudos (ecuación (69)).

Para cada paso de integración la velocidad de deformación aparente vendrá dada mediante la ecuación (71) y obedecerá en parte a una deformación del

material sólido  $\dot{\varepsilon}$  y otra parte debida a la población de microfisuras, es decir,  $\dot{\varepsilon}^a = \dot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon}^f$

El incremento debido a la población de microfisuras,  $\dot{\varepsilon}^f$ , se calcula como la variación del volumen de microfisuras derivando la ecuación (68),

$$\begin{aligned} \dot{V}_f &= \frac{16(1-\nu^2)}{3E} (\dot{\sigma}_n M_3 + \sigma_n \dot{M}_3) & (\sigma_n > 0, \text{ tracción}) \\ \dot{V}_f &= 0 & (\sigma_n < 0, \text{ compresión}) \end{aligned} \quad (76)$$

$$\dot{\varepsilon}^f = \bar{n} \dot{V}_f \bar{n}^t \quad (77)$$

siendo,

$$\sigma_n = \sigma \bar{n} \quad (78)$$

donde

$\bar{n}$  es el vector normal al plano de las microfisuras y  
 $\sigma$  es el tensor de tensiones en el material sólido.

$\dot{M}_3$  se calcula a partir de las ecuaciones (23) o (30) para la ley de crecimiento lineal de microfisuras o las ecuaciones (24) o (31) para el crecimiento parabólico. Los segundos miembros de esas ecuaciones dependen de los momentos de la población de microfisuras, de las constantes del material y de  $R_c$  y  $R_w$  (funciones de  $\sigma_n$ ) cantidades todas ellas conocidas.

$\dot{\sigma}_n$  sería conocida mediante la ecuación (75) si pudiésemos calcular la tensión de Jaumann  $\hat{\sigma}$  a partir de (73) pero en esta ecuación la velocidad de deformación del material sólido,  $\dot{\varepsilon}$ , no es conocida *a priori*.

Por ello hay que realizar un calculo iterativo suponiendo la velocidad de deformación en el sólido conocida.

Inicialmente podemos suponer una velocidad de deformación en el sólido  $\dot{\varepsilon}$  igual a la del incremento de tiempo anterior en este elemento o, en caso de ser desconocida, que toda la velocidad de deformación aparente procede de la deformación del material intacto ( $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^a$ , es decir, que no se modifica el volumen de microfisuras).

A partir de dicho valor, determinamos el ritmo de la tensión normal  $\dot{\sigma}_n$  lo cual nos permite calcular la parte de la velocidad de deformación aparente correspondiente a la variación de la población de microfisuras mediante (76) y (77). Este valor,  $\dot{\varepsilon}^f$ , nos permite aproximar un nuevo valor de  $\dot{\varepsilon}$  mediante la ecuación,

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^a - \dot{\varepsilon}^f \quad (79)$$

Se continua iterando hasta que se cumpla el criterio de convergencia en velocidades de deformación en el sólido.

### 3.7.5 Evolución de la población de microfisuras

El ritmo de variación de la población de microfisuras,  $\dot{M}_k^I$ ,  $\dot{M}_k^{II}$  y  $\dot{M}_k^{III}$  con ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ) para la ley de crecimiento lineal de microfisuras o ( $k = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \dots, n$ ) para crecimiento parabólico, se determina mediante las ecuaciones incluidas en los apartados 4.1 y 4.2 de este capítulo donde además las propiedades del material y de los momentos en el instante  $t$ , ambos conocidos, intervienen,

- La nucleación de microfisuras  $Nuc_k^{II}$  y  $Nuc_k^{III}$  calculadas con la función FORTRAN **RNUC** incluida en el Apéndice 1
- Tamaño crítico de fisuras  $R_c$  y tamaño de fisura correspondiente a la velocidad de crecimiento de Rayleigh  $R_w$  calculadas mediante las ecuaciones (3) y (9)
- $\dot{R}_c$  y  $\dot{R}_w$  calculadas derivando respecto a  $t$  las ecuaciones anteriores, (3) y (9), y por tanto función de  $\dot{\sigma}_n$
- $h(R_c)$  y  $h(R_w)$  valores de la función densidad de distribución de microfisuras en  $R_c$  y  $R_w$  calculados aproximando dicha función de distribución mediante sus momentos por alguno de los métodos expuestos en el apartado 5 de este capítulo. En el Apéndice 1 se incluyen las funciones FORTRAN **HCHB** y **CHEBV** correspondientes a la aproximación por polinomios de Chebyshev. La primera calcula los coeficientes de la aproximación por medio de la ecuación (51) y la segunda el valor de la distribución para cada tamaño de microfisura, y en particular para los tamaños  $R_c$  y  $R_w$ , según la ecuación (48).

La velocidad de crecimiento del tamaño máximo de microfisura,  $\dot{R}_f$ , se calcula mediante las ecuaciones (6) para crecimiento parabólico o (10) en el caso de crecimiento lineal.

La integración de la ecuación (69) impone un paso de integración,  $\Delta t$ , fijado<sup>3</sup> en el programa de elementos finitos.

Para la integración de las ecuaciones de evolución de la población de microfisuras se requiere la determinación de un paso de integración basado en criterios de la evolución de la población de microfisuras que puede exigir un  $\Delta t$  menor en algunos elementos dependiendo del volumen de material fisurado (y del método de integración empleado<sup>4</sup>).

<sup>3</sup>En el apartado 6.4.5 del capítulo 4 se incluyen algunos criterios empleados en los programas de elementos finitos.

<sup>4</sup>No vamos a considerar ningún método de integración específico. El método de integración adecuado dependerá del tipo de programa de elementos finitos (explícito o implícito) en que se implemente el modelo de material. En el capítulo 5 se mencionan algunos métodos de integración.

En general seleccionaremos un  $\Delta t_j$  para integración de las ecuaciones de evolución de la población de microfisuras con el siguiente criterio,

$$\Delta t_j = \min \left( \Delta t - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta t_k, \alpha \frac{R_f}{\dot{R}_f}, \beta \left| \frac{V_f}{\dot{V}_f} \right|, \gamma \frac{M_0}{\dot{M}_0} \right) \quad (80)$$

donde,

- $\Delta t_k$  ( $k=1,2, \dots, j-1$ ) son los pasos de integración anteriores
- $\alpha$  máximo crecimiento de las microfisuras de mayor tamaño
- $\beta$  máximo crecimiento del volumen de microfisuras
- $\gamma$  máximo crecimiento del número de microfisuras

Para cada  $\Delta t_j$  se actualiza,

$$\begin{aligned} M_k^I &:= M_k^I + \dot{M}_k^I \Delta t_j \\ M_k^{II} &:= M_k^{II} + \dot{M}_k^{II} \Delta t_j \\ M_k^{III} &:= M_k^{III} + \dot{M}_k^{III} \Delta t_j \\ R_f &:= R_f + \dot{R}_f \Delta t_j \\ \sigma &:= \sigma + \dot{\sigma} \Delta t_j \end{aligned} \quad (81)$$

Con el tensor de tensiones en el material intacto  $\sigma$  actualizado, la nueva población de microfisuras y aplicando las ecuaciones constitutivas del material podemos realizar un nuevo  $\Delta t_{j+1}$ , hasta alcanzar el  $\Delta t$  impuesto por el programa de elementos finitos, en el elemento considerado.

La tensión aparente,  $\sigma^a$ , correspondiente al paso  $t+\Delta t$  se calcula (véase Curran, Seaman y Shockey (1987) [28], pág. 359) mediante la ecuación,

$$\sigma^a = \sigma \left( I - \vec{n} V_f \vec{n}^t \right) \quad (82)$$

donde,

- $V_f$  es el volumen de microfisuras calculado mediante ecuación (68)
- $I$  es la matriz unidad
- $\vec{n}$  es el vector normal al plano de las microfisuras

Posteriormente, realizamos el mismo proceso en todos los elementos de la discretización de material fisurable.

Con dicha tensión aparente, calculada en todos los elementos, se vuelve a plantear un nuevo equilibrio de fuerzas en los nudos (ecuación (69)) lo cual nos permite repetir el mismo proceso en el instante  $t+\Delta t$ .

Datos del programa de E.F. :

$M\vec{a} = P - F$	equilibrio de fuerzas en los nudos en instante $t$
$\vec{a}$	aceleración en los nudos
$\vec{v}$	velocidad en los nudos
$\Delta t$	paso de integración

Para cada elemento :

$M_k^I, M_k^{II}, M_k^{III}, R_f$	datos de la distribución de microfisuras
$\sigma$	tensor de tensiones del material intacto
$(\text{grad} \vec{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$	calculado a partir de las velocidades en nudos
$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$	tensor de rotación
$\dot{\varepsilon}_{ij}^a = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$	tensor velocidad de deformación aparente
$\dot{\varepsilon}_n^a = \dot{\varepsilon}^a \vec{n}$	velocidad de deformación normal

**Cuadro 3-1** Resumen del modelo de material con microfisuras paralelas.

$\dot{\varepsilon}_0 := \dot{\varepsilon}^a$	$j := 0$	inicialización velocidad de deformación en el sólido
$j := j + 1$		inicia $\Delta t_j$
$i := 0$		
$i := i + 1$		iteración hasta convergencia en $\dot{\varepsilon}_i$
$\hat{\sigma} = C \dot{\varepsilon}_{i-1}$		ecuación constitutiva
$\dot{\sigma} = \hat{\sigma} + \omega \cdot \sigma - \sigma \cdot \omega$		derivada material tensor tensiones
$\sigma_n = \sigma \vec{n}$		tensión normal
$\dot{\sigma}_n = \dot{\sigma} \vec{n}$		
$\sigma_n > 0$		tracción
$R_c = \frac{\pi}{4} \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_n} \right)^2$		radio crítico
$R_w = \frac{C_R}{T_1 \sigma_n} + \frac{R_c}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4 C_R}{T_1 \sigma_n R_c}} \right)$		
$Nuc_k^{II} = RNUC(k, R_c, R_w, \sigma_n)$		nucleación
$Nuc_k^{III} = RNUC(k, R_w, T_7, \sigma_n)$		
$\dot{M}_0 = Nuc_0^{II} + Nuc_0^{III}$		incremento número microfisuras
$\dot{M}_k = Nuc_k^{II} + Nuc_k^{III} + a k \left( M_k^{II} - R_c M_{k-1}^{II} \right) + k C_R M_k^{III}$	$(k = 1, 2, 3)$	ley lineal
$\dot{M}_k = Nuc_k^{II} + Nuc_k^{III} + b k \left( M_k^{II} - \sqrt{R_c} M_{k-1/2}^{II} \right) + k C_R M_k^{III}$	$(k = 1 / 2, 1, 3 / 2, 2, 5 / 2, 3)$	ley parabólica
$\dot{V}_f = \frac{16(1-\nu^2)}{3E} (\dot{\sigma}_n M_3 + \sigma_n \dot{M}_3)$		ritmo de variación del vol. fisuras
$\dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}^a - \vec{n} \dot{V}_f \vec{n}^t$		velocidad de def. en el material intacto en tracción

**Cuadro 3-1** Resumen del modelo de material con microfisuras paralelas (continuación).



$\sigma_n < 0 \quad \dot{\varepsilon} := \dot{\varepsilon}^a$	velocidad de deformación en el material intacto en compresión
$\dot{\varepsilon}_i \approx \dot{\varepsilon}_{i-1} ?$	repetir hasta convergencia en $\dot{\varepsilon}$
$\dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}_i$	velocidad de deformación estimada para el siguiente $\Delta t_j$
$m_k = \frac{M_k}{R_f^{k+1}}$	momentos reducidos
$\vec{c} = A^{-1}m$	función Fortran HCHEB
$h(R_c) = \sum_{k=0}^n c_k T_k^* \left( \frac{R_c}{R_f} \right)$	función Fortran CHEBEV
$h(R_w) = \sum_{k=0}^n c_k T_k^* \left( \frac{R_w}{R_f} \right)$	función Fortran CHEBEV
$\dot{M}_0^I = \dot{R}_c h(R_c)$	
$\dot{M}_0^{II} = Nuc_0^{II} - \dot{R}_c h(R_c)$	
$\dot{M}_0^{II} = Nuc_0^{II} + (\dot{R}_w - C_R) h(R_w) - \dot{R}_c h(R_c)$	
$\dot{M}_0^{III} = Nuc_0^{III} - (\dot{R}_w - C_R) h(R_w)$	
$\dot{M}_k^I = \dot{R}_c R_c^k h(R_c)$	$(k = 1, 2, 3 \dots n)$
$\dot{M}_k^{III} = Nuc_k^{III} + k C_R M_{k-1}^{III} - (\dot{R}_w - C_R) R_w^k h(R_w)$	$(k = 1, 2, 3 \dots n)$
Ley de crecimiento lineal:	
$\dot{M}_k^{II} = Nuc_k^{II} + a k (M_k^{II} - R_c M_{k-1}^{II}) + (\dot{R}_w - C_R) R_w^k h(R_w) - \dot{R}_c R_c^k h(R_c)$	$(k = 1, 2, 3 \dots n)$
Ley de crecimiento parabólica:	
$\dot{M}_k^{II} = Nuc_k^{II} + b k (M_k^{II} - \sqrt{R_c} M_{k-1/2}^{II}) + (\dot{R}_w - C_R) R_w^k h(R_w) - \dot{R}_c R_c^k h(R_c)$	$(k = 1/2, 1, 3/2, 2, \dots n)$

**Cuadro 3-1** Resumen del modelo de material con microfisuras paralelas (continuación).

$\dot{R}_f = w(R_f)$	función Fortran W
$\Delta t_j = \min \left( \Delta t - \sum_{k=1}^{i-1} \Delta t_k, \alpha \frac{R_f}{\dot{R}_f}, \beta \left  \frac{V_f}{\dot{V}_f} \right , \gamma \frac{M_0}{\dot{M}_0} \right)$	determina paso de integración ec. evolución microfisuras
$M_k^I := M_k^I + \dot{M}_k^I \Delta t_j$	
$M_k^{II} := M_k^{II} + \dot{M}_k^{II} \Delta t_j$	
$M_k^{III} := M_k^{III} + \dot{M}_k^{III} \Delta t_j$	
$R_f := R_f + \dot{R}_f \Delta t_j$	
$\sigma := \sigma + \dot{\sigma} \Delta t_j$	
si $\sum_{k=1}^j \Delta t_k < \Delta t$	integrar otro $\Delta t_j$
<u>Calcular tensión aparente</u>	
$\sigma^a = \sigma \left( I - \bar{n}^t V_f \bar{n} \right)$	
<u>Repetir para todos los elementos de la discretización</u>	
<u>Integración ecuaciones de movimiento :</u>	
$M\ddot{a} = P - F$	equilibrio de fuerzas en los nudos en instante $t + \Delta t$

**Cuadro 3-1** Resumen del modelo de material con microfisuras paralelas (continuación).

## 4. CONVECCIÓN DE UNA POBLACIÓN DE MICROFISURAS

4.1. Introducción	85
4.2. Método de solución de la ecuación de evolución de microfisuras	86
4.3. Funciones armónicas esféricas	87
4.4. Aproximación de la función densidad de microfisuras mediante funciones armónicas esféricas	90
4.5. Aproximación de la distribución inicial de microfisuras	92
4.6. Implementación computacional	94
4.6.1. Determinación de $\text{div } \vec{v}$ y $\text{grad } \vec{v}$	94
4.6.2. Cálculo de los términos $A_{i,j,m,k,n,l}$	98
4.6.3. Cálculo de las condiciones iniciales	99
4.6.4. Evolución de una población de microfisuras por convección	100
4.6.4.1. Coeficientes del sistema de ecuaciones diferenciales	100
4.6.4.2. Orden de discretización	100
4.6.4.3. Distribución inicial de microfisuras	102
4.6.4.4. Movimiento del sólido	103
4.6.4.5. Integración de las ecuaciones de evolución	104
4.6.4.6. Representación gráfica de resultados	107
4.6.4.7. Impresión de resultados	107
4.7. Ejemplos numéricos	109
4.7.1. Tracción	109
4.7.2. Cortante simple	112
4.7.3. Movimiento de sólido rígido	115

#### 4.1. Introducción

En el capítulo anterior hemos considerado la evolución de una población de microfisuras todas ellas con idéntica orientación, pero considerando nucleación y crecimiento de las mismas.

En este capítulo estudiaremos la evolución de una población de microfisuras con orientaciones en el espacio distintas, cuando estas son “arrastradas” por el movimiento del material. En este caso, supondremos que no se produce nucleación de nuevas microfisuras ni crecimiento de las existentes.

En cada punto material  $X$  representamos esta población de fisuras mediante la función  $N(t, \vec{n})$  la cual nos define, en cada instante  $t$ , la densidad de microfisuras con orientación  $\vec{n}$  (o sea, número de fisuras por unidad de volumen de material y por unidad de ángulo sólido). Recordamos que las microfisuras se suponen planas y su orientación viene dada por la normal  $\vec{n}$  a su plano.

La evolución de una población de microfisuras debida a convección pura, viene representada por la siguiente ecuación (véase ecuación (92) del capítulo 2),

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \left( (\text{grad}_x \vec{v})^t \vec{n} \right) \cdot \text{grad}_{\vec{n}} N + (\text{div}_x \vec{v}) N - \frac{3N}{|\vec{n}|^2} \left( (\text{grad}_x \vec{v})^t \vec{n} \right) \cdot \vec{n} \quad (1)$$

junto a la condición de homogeneidad de grado cero de la función  $N$  en la variable  $\vec{n}$ , es decir la función densidad de fisuras  $N(t, \vec{n})$  no depende ni del módulo de  $\vec{n}$  ni siquiera de su sentido. Esta condición se ha expresado anteriormente (véase ecuación (82) del capítulo 2), mediante el teorema de Euler, como,

$$\vec{n} \cdot \vec{\text{grad}}_{\vec{n}} N = 0 \quad (2)$$

Podemos escribir la ecuación (1) en componentes de coordenadas rectangulares cartesianas,

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \sum_{i,j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} n_j \frac{\partial N}{\partial n_i} + \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} N - \frac{3N}{|\vec{n}|^2} \sum_{i,j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} n_j n_i \quad (3)$$

donde los índices sumatorios varían entre 1 y 3

#### 4.2. Método de solución de la ecuación de evolución de microfisuras

La resolución de la anterior ecuación en derivadas parciales es computacionalmente muy costosa, pues además es necesario calcularla en cada elemento de discretización del continuo y para cada instante  $t$  (paso de integración).

Por ello vamos a transformar dicha ecuación en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Con este fin aproximaremos la función de densidad de orientaciones de la población de microfisuras  $N(t, \vec{n})$  mediante una familia de funciones de  $n$  parámetros, dependientes del tiempo, que representaremos por  $F(\vec{n}, p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$

La idea es determinar los parámetros  $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$  que nos fijan en cada instante la función  $F(t, \vec{n})$  de la familia de funciones  $F$  más próxima a  $N(t, \vec{n})$ .

El criterio de proximidad entre una función  $F \in \mathbf{F}$  y  $N$  vendrá dado por el grado de cumplimiento de la ecuación (3) cuando reemplazamos  $N$  por  $F$ . Al hacer dicha sustitución la ecuación deja de ser una igualdad pues, en general, no existirá ningún miembro de la familia  $F$  que la satisfaga.

Por ello, definiremos un criterio de cumplimiento de la anterior ecuación de evolución de microfisuras en un sentido global o promedio.

La mejor aproximación consistirá en aquella función  $F$  perteneciente a la familia de funciones  $F$  que, al ser sustituida en vez de  $N$ , iguala las integrales extendidas a todas las orientaciones posibles de las normales,  $S_n$ , de ambos miembros de la ecuación (1) multiplicados por unas funciones de peso<sup>1</sup>  $w_i(\vec{n})$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )

Es decir,

$$\int_{S_n} w_i(\vec{n}) \left( \frac{\partial F}{\partial t} - ((\text{grad}_x \vec{v})^t \vec{n}) \cdot \text{grad}_{\vec{n}} F - (\text{div}_x \vec{v}) F + \frac{3F}{|\vec{n}|^2} ((\text{grad}_x \vec{v})^t \vec{n}) \cdot \vec{n} \right) dS_n = 0$$

( $i=1, 2, \dots, n$ ) (4)

Además  $F$  debe de satisfacer la condición de homogeneidad de grado cero, es decir,

$$F(t, \alpha \vec{n}) = F(t, \vec{n}) \quad (5)$$

<sup>1</sup>Esta aproximación mediante formulaciones integrales constituye el método de los residuos ponderados de Galerkin (véase, por ejemplo, Zienkiewicz (1980) [142] págs. 58 y sigs.)

La familia de funciones de aproximación y las funciones de peso a considerar se fijan *a priori*, y son escogidas por el analista numérico en un compromiso entre grado de aproximación y coste computacional.

A continuación presentamos un tipo de funciones, que por sus características, son especialmente atractivas para la resolución numérica de la ecuación de evolución de las microfisuras por convección.

#### 4.3. Funciones armónicas esféricas

El lugar geométrico de los extremos de los vectores unitarios que definen la orientación de las normales a las microfisuras, es la superficie de la semiesfera unidad y por ello es conveniente emplear como funciones de aproximación funciones definidas sobre dicha esfera. Por ello, representaremos el vector  $\vec{n}$  en coordenadas esféricas, y por lo tanto sus componentes vendrán dadas por,

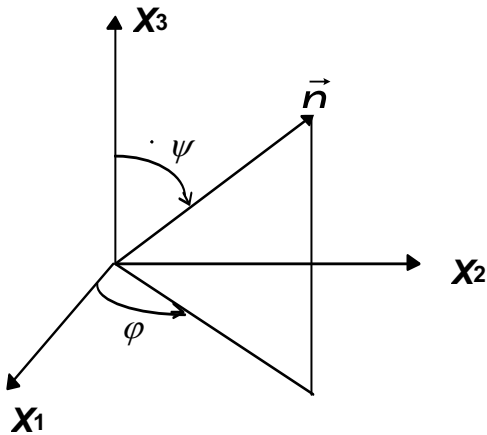
$$\begin{aligned} n_1 &= r \cos \varphi \sin \psi \\ n_2 &= r \sin \varphi \sin \psi \\ n_3 &= r \cos \psi \\ r &= \|\vec{n}\| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad 0 \leq \psi \leq \pi \end{aligned}$$


Figura 4-1 Coordenadas esféricas

Las llamadas funciones armónicas esféricas están definidas en  $\varphi \in [0, 2\pi]$  y  $\psi \in [-\pi, \pi]$  y vienen definidas por la siguiente expresión (véase, por ejemplo, Korn y Korn (1961) [72] pág. 871),

$$q_{m,k} = \sqrt{\frac{(2m+1)(m-|k|)!}{2\pi(1+\delta_{k,0})(m+|k|)!}} \begin{cases} \cos k\varphi \\ 1 \\ \sin k\varphi \end{cases} P_m^{|k|}(\cos \psi) \quad \begin{cases} k > 0 \\ k = 0 \\ k < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$(m = 0, 1, 2, 3, \dots; k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, m)$$

siendo  $P_m^k(t)$  la funciones asociada de Legendre de primera especie de grado  $m$  y orden  $k$ , definidas en el intervalo  $[-1, 1]$

$$P_m^k(t) = (1-t^2)^{k/2} \frac{d^k P_m(t)}{dt^k} \quad (m = 0, 1, 2, \dots; k \leq m) \quad (7)$$

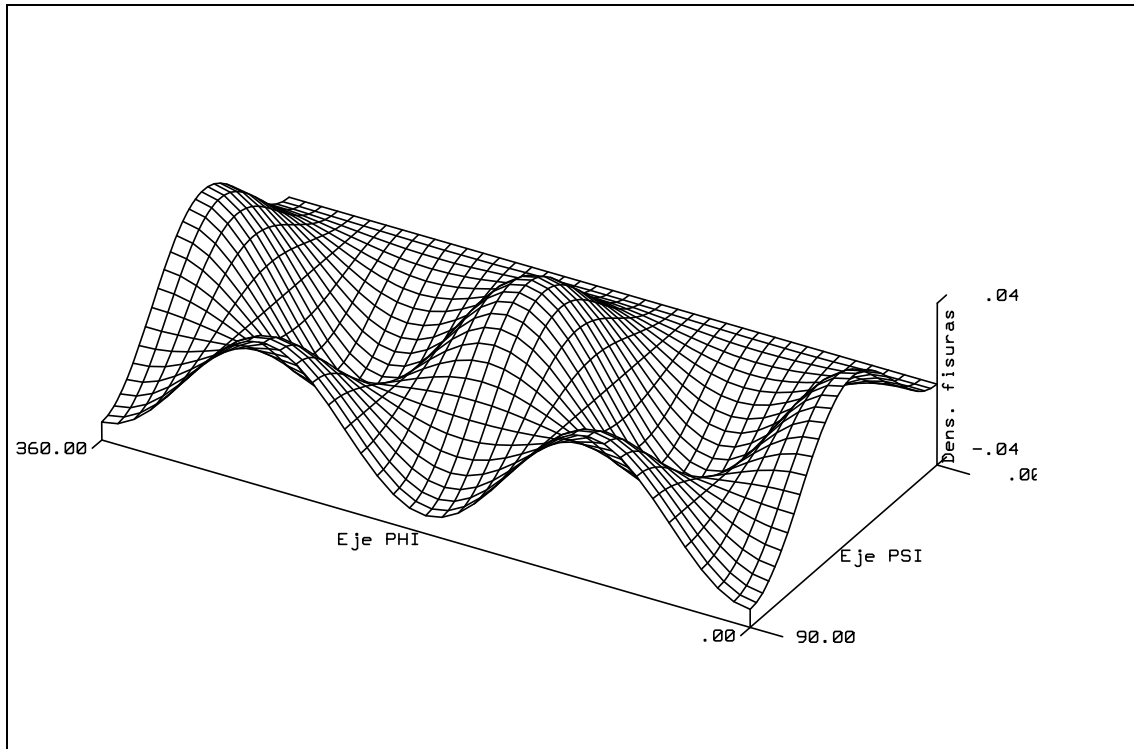
y donde  $P_m(t)$  es el llamado polinomio de Legendre de grado  $m$  cuya expresión matemática viene definida por la llamada fórmula de Rodrigues (véase Korn y Korn (1961) [72] pág. 852),

$$P_m(t) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dt^m} (t^2 - 1)^m \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

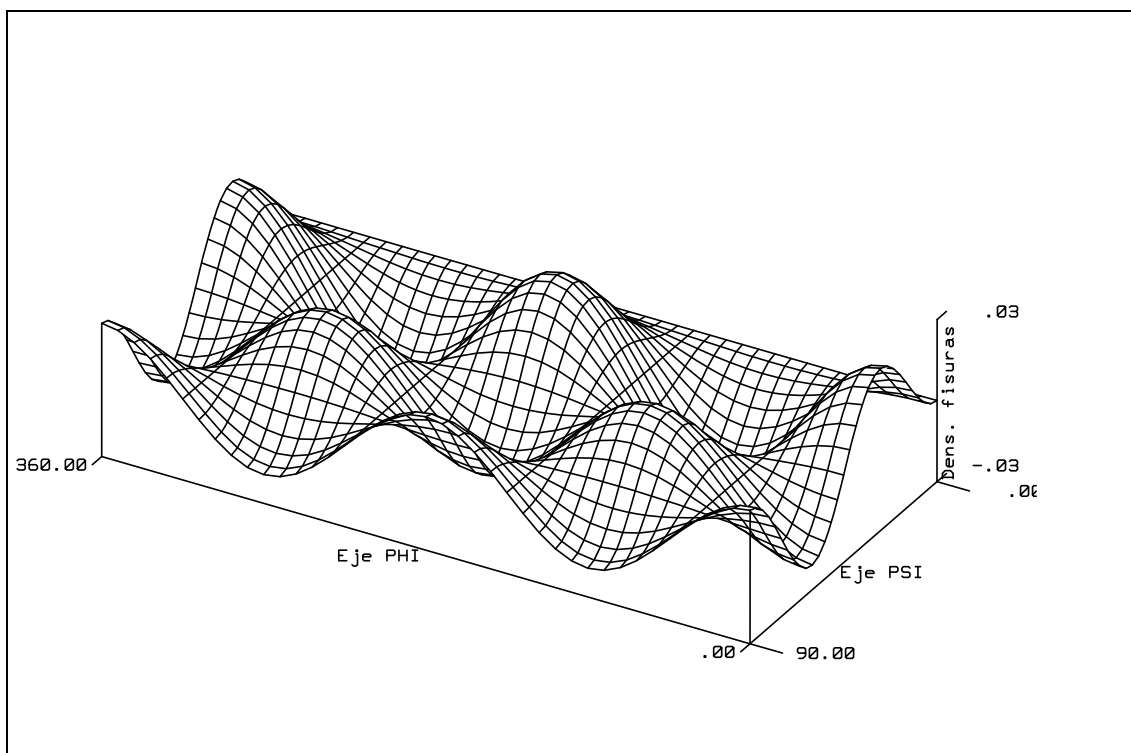
Las funciones armónicas esféricas  $q_{m,k}$  forman un conjunto de funciones ortonormales sobre la esfera de radio unidad, es decir,

$$\int_S q_{m,k} q_{n,l} dS = \delta_{m,n} \delta_{k,l} \quad (9)$$

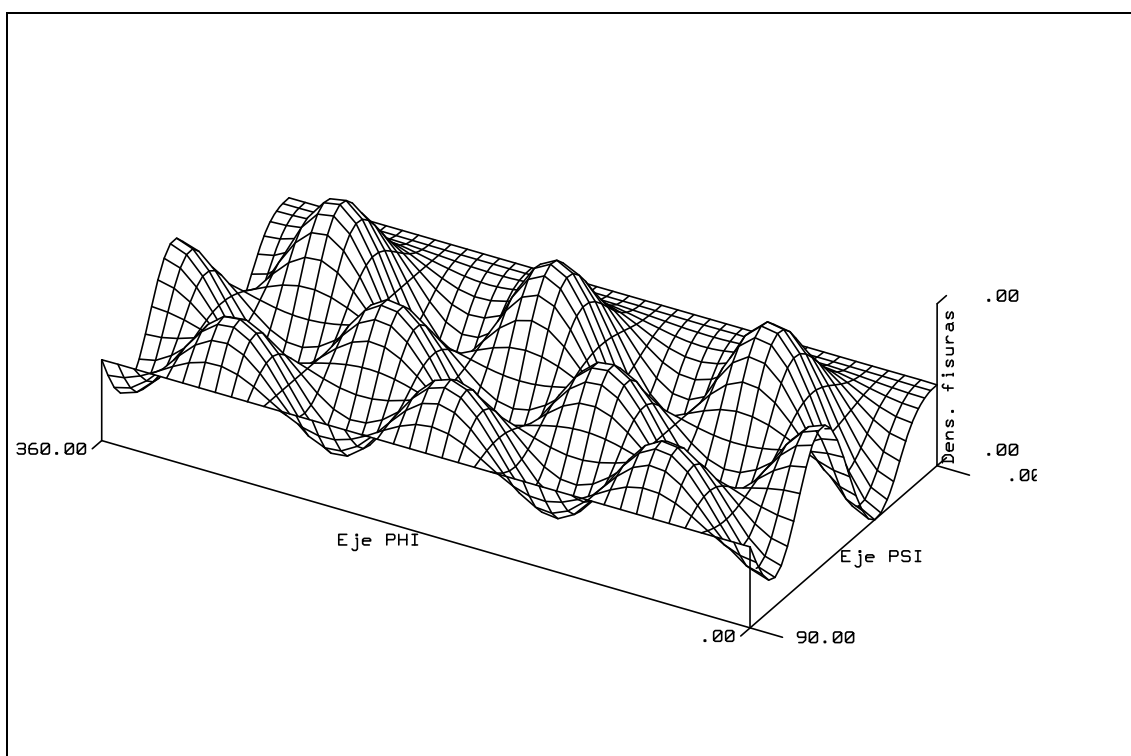
Las funciones  $q_{m,k}$  son periódicas sobre la superficie de la esfera y cambian de signo sobre curvas  $\varphi = \text{constante}$  y  $\psi = \text{constante}$ . En las figuras siguientes se muestran ejemplos del aspecto de estas funciones (Figura 4-2 a Figura 4-4).



**Figura 4-2** Armónico esférico  $q_{2,2}$  sobre el desarrollo de una semiesfera.



**Figura 4-3** Armónico esférico  $q_{3,2}$  sobre el desarrollo de una semiesfera.



**Figura 4-4** Armónico esférico  $q_{4,3}$  sobre el desarrollo de una semiesfera.



#### 4.4. Aproximación de la función densidad de microfisuras mediante funciones armónicas esféricas

Aproximamos la función densidad de orientaciones de fisuras  $N(t, \vec{n})$  mediante la familia de funciones formada por combinación lineal de funciones armónicas esféricas. Un miembro genérico de dicha familia tiene la expresión,

$$F(t, \varphi, \psi) = \sum_{m=0}^M \sum_{k=-m}^m c_{m,k}(t) q_{m,k}(\varphi, \psi) \quad (10)$$

Esta función además de cumplir “adecuadamente” la ecuación de evolución de las microfisuras (es decir, ser solución del sistema de ecuaciones (4)) tiene que satisfacer la condición de homogeneidad.

Este requisito de homogeneidad se traduce como hemos indicado más arriba, en independencia de la función solución  $F$  tanto del módulo del vector orientación  $\vec{n}$  como de su sentido.

La primera condición se verifica automáticamente, puesto que la función no depende de  $r$  (módulo del vector en coordenadas esféricas).

La segunda condición,  $F(t, -\vec{n}) = F(t, \vec{n})$ , se traduce en coordenadas esféricas en,

$$F(t, \pi + \varphi, \pi - \psi) = F(t, \varphi, \psi) \quad (11)$$

que sustituida en (10) es fácil comprobar se transforma en,

$$F(t, \pi + \varphi, \pi - \psi) = (-1)^m F(t, \varphi, \psi) \quad (12)$$

Esta condición nos obliga a considerar únicamente funciones armónicas esféricas  $q_{m,k}$  cuyo grado,  $m$ , sea par.

Por lo tanto, la función solución será del tipo,

$$F(t, \varphi, \psi) = \sum_{m=0}^M \sum_{k=-2m}^{2m} c_{2m,k}(t) q_{2m,k}(\varphi, \psi) \quad (13)$$

donde la evolución de los coeficientes  $c_{2m,k}(t)$  vendrá dada, en cada instante, por el sistema de ecuaciones (4).

Como funciones de peso en dicho sistema de ecuaciones escogemos, por conveniencia para el cálculo, las mismas funciones  $q_{2n,l}(\varphi, \psi)$  con  $(n = 0, 1, 2, \dots; l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2n)$ .

El primer término de la ecuación (4) se transforma en,

$$\int_{S_n} q_{2n,l} \frac{\partial F}{\partial t} dS_n = \int_{S_n} q_{2n,l} \sum_{m=0}^M \sum_{k=-2m}^{2m} \dot{c}_{2m,k}(t) q_{2m,k} dS_n = \dot{c}_{2n,l}(t) \quad (14)$$

donde se ha considerado la condición de ortonormalidad de las funciones  $q_{m,k}$  (ecuación (9))

El sistema de ecuaciones diferenciales que determina la evolución de los coeficientes de nuestra función solución  $F(t, \varphi, \psi)$  es,

$$\begin{aligned} \dot{c}_{2n,l}(t) = & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \sum_{m=0}^M \sum_{k=-2m}^{2m} c_{2m,k}(t) \int_{S_n} q_{2n,l} q_{2m,k} dS_n + \\ & \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \sum_{m=0}^M \sum_{k=-2m}^{2m} c_{2m,k}(t) \int_{S_n} \left( n_i q_{2n,l} \frac{\partial q_{2m,k}}{\partial n_j} - 3 \frac{n_i n_j}{|\vec{n}|^2} q_{2n,l} q_{2m,k} \right) dS_n \end{aligned} \quad (15)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots; l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2n)$

donde se ha sustituido la función  $F$  en la ecuación (4) expresada en coordenadas rectangulares cartesianas (véase también la ecuación (3))

Nótese que la primera integral por la propiedad de ortonormalidad de las funciones armónicas esféricas (ecuación (9)) vale  $\delta_{m,n} \delta_{l,k}$  y podemos expresar la anterior ecuación de una forma más compacta,

$$\dot{c}_{2n,l}(t) = c_{2n,l}(t) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \sum_{m=0}^M \sum_{k=-2m}^{2m} c_{2m,k}(t) A_{i,j,m,k,n,l} \quad (16)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots; l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2n)$

donde la matriz de seis índices  $A_{i,j,m,k,n,l}$  depende únicamente de integrales de las funciones  $q_{m,k}$  y sólo es necesario evaluarlas una vez. Los detalles de este cálculo, algo farragoso, lo incluimos en el Apéndice 2

#### 4.5. Aproximación de la distribución inicial de microfisuras

El estado inicial de microfisuración de un material puede obedecer a causas diversas entre las que mencionaremos, a modo de ejemplo, las siguientes,

- En materiales naturales, como rocas, el estado de microfisuración es debido a su origen y posteriores condiciones ambientales.
- El proceso de fabricación del material, tratamientos, soldaduras y tensiones introducidas durante la construcción.
- Estados tensionales anteriores a las solicitaciones objeto del estudio.

Sea  $N_0(\varphi, \psi)$  la función que representa en el instante inicial del estudio la distribución en orientaciones de la población de microfisuras.

En el estudio de la evolución por convección de una población de microfisuras es necesario especificar, de una manera adecuada, la distribución inicial en orientaciones de dicha población.

Para imponer las condiciones iniciales en el sistema de ecuaciones diferenciales de la evolución de las microfisuras (16), es necesario aproximar la función  $N_0(\varphi, \psi)$  mediante combinaciones lineales de armónicos esféricos.

Representaremos por  $S_{M,K}$  una combinación lineal de armónicos esféricos hasta el grado  $2M$  y orden  $K$ , es decir,

$$S_{M,K}(\varphi, \psi) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=-2m}^{2m} a_{2m,k} q_{2m,k}(\varphi, \psi) + \sum_{k=-K}^K a_{2M,k} q_{2M,k}(\varphi, \psi) \quad (17)$$

donde  $M=0,1,2,3,\dots$   $K=0,1,2,\dots,2M$

El objetivo es determinar los coeficientes  $a_{2m,k}$  que mejor aproximan la función  $N_0(\varphi, \psi)$  mediante armónicos esféricos.

Si  $N_0(\varphi, \psi)$  es tal que existe<sup>2</sup>  $\int_{S_n} |N_0(\varphi, \psi)| dS_n$  los coeficientes de Fourier respecto al sistema ortogonal  $\{q_{2m,k}\}$  vendrán definidos por,

$$c_{2m,k} = \int_{S_n} N_0(\varphi, \psi) q_{2m,k}(\varphi, \psi) dS_n \quad (18)$$

$$(m = 0,1,2,\dots,M; k = 0,\pm 1,\pm 2,\dots,\pm 2m)$$

<sup>2</sup>Aunque el uso de integrales de Lebesgue haría la teoría más general consideraremos integrales en el sentido de Riemann.

Nótese que los coeficientes  $c_{2m,k}$  son independientes del grado y del orden de la combinación lineal.

Si  $N_0(\varphi, \psi)$  es tal que existe  $\int_{S_n} (N_0(\varphi, \psi))^2 dS_n$  entre todas las combinaciones lineales (18) aquella que minimiza el error cuadrático  $\int_{S_n} (N_0(\varphi, \psi) - S_{m,n}(\varphi, \psi))^2 dS_n$  es la correspondiente a los coeficientes de Fourier  $c_{2m,k}$

Se puede demostrar (véase, por ejemplo, Kolmogórov y Fomín (1975) [71] págs. 159-160) que la sucesión  $S_{m,k}$  de sumas parciales de la serie de Fourier,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=-2m}^{2m} c_{2m,k} q_{2m,k}(\varphi, \psi) \quad (19)$$

converge cuadráticamente, y por lo tanto en media, hacia la función  $N_0(\varphi, \psi)$ .

Sin embargo para nuestra aplicación es más importante tener convergencia uniforme. Un método para conseguir una convergencia uniforme hacia la función  $N_0(\varphi, \psi)$ , si esta es continua, son las llamadas sumas de Fejér, en honor del matemático Fejér que en 1905 demostró el teorema (véase Kolmogórov y Fomín (1975) [71] págs. 459-462).

Las sumas de Fejér,

$$F_{M,K}(\varphi, \psi) = \frac{1}{M^2 + K + 1} \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^K S_{m,k}(\varphi, \psi) \quad (20)$$

$(M = 0, 1, 2, 3, \dots; K = 0, 1, 2, \dots, 2M)$

son las medias aritméticas de las sumas parciales de la serie de Fourier; que también podemos representar como una combinación lineal de armónicos esféricos del tipo (17) con coeficientes,

$$a_{2m,k} = \left( 1 - \frac{m^2 + |k|}{M^2 + K + 1} \right) c_{2m,k} \quad (21)$$

donde  $c_{2m,k}$  son los coeficientes de Fourier obtenidos mediante (18).

#### **4.6. Implementación computacional**

El objeto de este apartado es mostrar la viabilidad del método y la posibilidad de implementación de este modelo de material fisurable en un programa de elementos finitos (o diferencias finitas) de propósito general.

Para ello se han desarrollado una serie de programas de cálculo por ordenador que implementan el método anteriormente descrito. Aunque estas rutinas no se han incluido en un programa de análisis tensional, y por tanto el movimiento de la población de fisuras tiene que ser especificado por el usuario, se indica claramente la manera de hacerlo.

A continuación se incluye una descripción del *software* desarrollado, así como los datos de entrada necesarios y una explicación de los resultados obtenidos. En el Apéndice 3 se incluye un listado de los programas que pueden ser seguidos sin dificultad con las explicaciones incluidas en este apartado.

##### **4.6.1. Determinación de $\text{div } \vec{v}$ y $\text{grad } \vec{v}$**

La gran mayoría de los programas de ordenador de análisis tensional de sólidos emplean el método de los elementos finitos. Entre los programas de elementos finitos de propósito general que incluyen efectos dinámicos y no linealidades<sup>3</sup> podemos destacar ANSYS [7], NASTRAN [91], DYNA [57] [58], NIKE [80], COSMOS [25], ADINA [5], ABAQUS [1], etc.

El propósito de este apartado es únicamente indicar como se calculan los términos  $\text{div } \vec{v}$  y  $\text{grad } \vec{v}$  que aparecen en la ecuación (16) en un programa de elementos finitos genérico.

Una exposición completa y rigurosa del método de los elementos finitos no es objeto de esta Tesis por lo cual la descripción que realizaremos a continuación estará enfocada a mostrar la viabilidad del cálculo de  $\text{div } \vec{v}$  y  $\text{grad } \vec{v}$ .

El método de los elementos finitos consiste en la discretización del continuo en elementos de formas geométricas sencillas. Aunque los programas de elementos finitos incluyen gran variedad de elementos, que el analista debe seleccionar en cada caso concreto, para fijar ideas supondremos elementos lineales hexaédricos.

En estos hexaedros se definen unas funciones de interpolación, denominadas *funciones de forma*, que dependen del tipo de elemento considerado. Estas funciones de forma definen de manera única el campo de desplazamientos en cada elemento en función de los desplazamientos de sus vértices.

---

<sup>3</sup>Incluimos como no linealidades tanto las debidas al material (plasticidad, fractura, modelos de daño, etc.) como las geométricas (grandes desplazamientos y/o deformaciones).

Los elementos finitos están interconectados a través de sus vértices en unos puntos que denominaremos *nodos* o *puntos nodales*.

Es en estos nodos donde se plantean las ecuaciones del sistema en estudio y donde obtenemos las incógnitas fundamentales que en los análisis tensionales dinámicos son los desplazamientos<sup>4</sup>, velocidades y aceleraciones. Estos valores nos determinan el campo de movimiento en todo el sólido y, a través de las ecuaciones constitutivas del material, su estado tensional.

La posición, en un determinado instante  $t$ , de un punto material  $X$  (identificado por las coordenadas de su posición respecto a un sistema de coordenadas global en el instante inicial) vendrá dada por la expresión,

$$x_i(X, t) = x_i(X(\xi, \eta, \varsigma), t) = \sum_{k=1}^8 \phi_k(\xi, \eta, \varsigma) x_i^k(t) \quad (22)$$

donde  $x_i^j$  es la coordenada del  $j$ -ésimo nudo en la  $i$ -ésima dirección coordenada y  $\phi_j$  es la función de forma de primer orden para el hexaedro de 8 nodos que tiene la expresión,

$$\phi_k(\xi, \eta, \varsigma) = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_k) (1 + \eta \eta_k) (1 + \varsigma \varsigma_k) \quad (23)$$

donde  $\xi, \eta, \varsigma$  son las coordenadas naturales del elemento (véase Figura 4-5) y  $\xi_k, \eta_k, \varsigma_k$  toman los valores  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  en los nodos.

Obtenemos la velocidad de la partícula  $X$  del material en el instante  $t$  derivando respecto al tiempo la expresión (22),

$$v_i(X, t) = \frac{\partial x_i(X(\xi, \eta, \varsigma), t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^8 \phi_k(\xi, \eta, \varsigma) v_i^k(t) \quad (24)$$

y por lo tanto,

$$(\text{grad } \vec{v})_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^8 \frac{\partial \phi_k(\xi, \eta, \varsigma)}{\partial x_j} v_i^k(t) \quad (25)$$

<sup>4</sup>Aunque actualmente no es corriente, existen programas de ordenador que aplican el método de los elementos finitos mediante el equilibrio de fuerzas en los nodos, en contraposición al habitual *método de las desplazamientos* que plantea la compatibilidad de desplazamientos. En ese planteamiento, del método de los elementos finitos, conocido como *método de las fuerzas*, las incógnitas fundamentales son las fuerzas en los nodos.

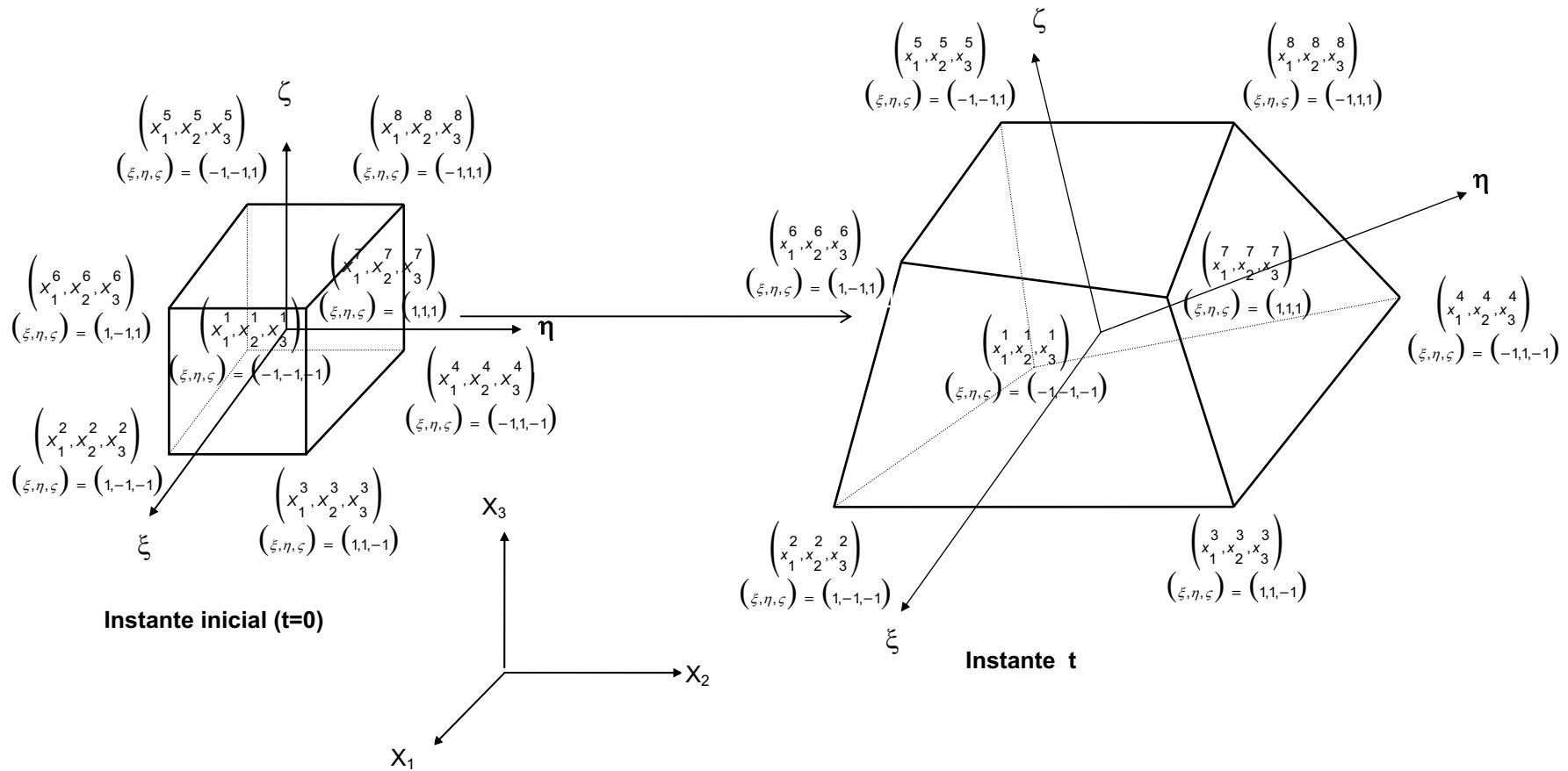


Figura 4-5 Elemento hexaedro

$$\text{div } \vec{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^8 \frac{\partial \phi_k(\xi, \eta, \varsigma)}{\partial x_i} v_i^k(t) \quad (26)$$

Los términos  $\frac{\partial \phi_k}{\partial x_j}$  pueden calcularse a partir de las relaciones,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_k}{\partial \varsigma} \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \varsigma} & \frac{\partial x_2}{\partial \varsigma} & \frac{\partial x_3}{\partial \varsigma} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_k}{\partial} \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial} \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (27)$$

donde  $[J]$  es la matriz Jacobiano de la transformación cuya determinación es necesaria en los programas de elementos finitos para la evaluación numérica de las integrales de volumen en los elementos.

La inversa de dicha matriz, que también es precisa en los programas de elementos finitos para el cálculo de la matriz deformación-desplazamiento, nos determina los términos necesarios para el cálculo de  $\text{div } \vec{v}$  y  $\text{grad } \vec{v}$ ,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x_3} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_k}{\partial \varsigma} \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (28)$$



#### 4.6.2. Cálculo de los términos $A_{i,j,m,k,n,l}$

Los coeficientes  $A_{i,j,m,k,n,l}$  del sistema de ecuaciones diferenciales que representa el movimiento de una población de fisuras por convección (16), son constantes en el tiempo, y vienen dadas por unas integrales cuyas expresiones se han deducido en el Apéndice 2.

Estos coeficientes se calculan mediante el programa Fortran **GEN** que evalúa dichas integrales mediante integración numérica en  $\varphi \in [0, 2\pi]$  y  $\psi \in [0, \pi/2]$  por el procedimiento de Gauss-Legendre.

La descripción del método de integración de Gauss-Legendre se puede consultar, por ejemplo, en, Press William H., et. al. (1992) [103].

Tanto por economía de espacio de almacenamiento como por eficiencia computacional en vez de considerar una matriz  $A_{i,j,m,k,n,l}$  de seis índices trabajamos con una matriz  $A_{i,j,f,g}$  de cuatro índices donde los dos índices  $m$  y  $k$  se sustituyen por un solo índice  $f$  y análogamente, los índices  $n$  y  $l$  se sustituyen por  $g$ .

Dicha sustitución se realiza almacenando consecutivamente los términos  $k = -2m, -2m+1, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 2m-1, 2m$  primero para  $m=0$ , luego para  $m=1$  y así sucesivamente hasta el término  $m=M$  siendo  $M$  el orden de la discretización.

El número total de términos del índice  $f$  es  $F_{max}=(2M+1)(M+1)$  (nótese que el número de términos sigue una progresión aritmética).

El número de términos de la matriz  $A_{i,j,f,g}$  viene dado por el producto de la dimensión de cada una de los índices, es decir,  $3 \times 3 \times (2M+1)(M+1) \times (2N+1)(N+1)$  lo cual se traduce en 2025 coeficientes para  $M=N=2$ , 7056 para  $M=N=3$  y 480249 para el caso  $M=N=10$ .

Los datos de entrada para el programa **GEN** consisten únicamente en el orden de la discretización (valores  $M$  y  $N$ ) y el número de puntos de integración para la integración numérica.

Un número de 50 puntos de integración, para el caso  $M=N=3$ , proporciona cinco cifras significativas exactas. El tiempo de cálculo en un ordenador tipo PC con procesador 486/66 es inferior a dos minutos para 50 puntos de integración y de media hora para 1000 puntos de integración. Los coeficientes están bien condicionados siendo 3 el término de mayor valor absoluto de los mismos. El caso de orden de discretización 10 con 100 puntos de integración necesita 13 horas de cálculo.

Los resultados del programa consisten en un fichero binario, llamado SPHCOEF.10 , que contiene los coeficientes  $A_{i,j,f,g}$  necesarios para la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales.

Los detalles del programa **GEN** se pueden seguir mediante el listado del mismo en el Apéndice 3 donde asimismo se incluyen, bajo el epígrafe rutinas auxiliares, las subrutinas de cálculo numérico tomadas de la anterior referencia.

#### 4.6.3. Cálculo de las condiciones iniciales

Los coeficientes  $C_{2m,k}$  de la descomposición en armónicos esféricos se calculan mediante integración numérica por el método de Gauss-Legendre de las ecuaciones (18).

A modo de ejemplo el programa Fortran **NOR2** , incluido en el Apéndice 3, calcula los coeficientes de la descomposición en armónicos esféricos de una población de microfisuras que puede aproximarse mediante una distribución normal bidimensional.

Este tipo de distribución gaussiana, representa adecuadamente poblaciones de microfisuras cuyas normales se concentran en torno a una dirección preferente.

La función de densidad de probabilidad conjunta, para el caso de que las variables  $\varphi$  y  $\psi$  sean independientes, viene dada (véase Ríos (1973) [110]) por,

$$Nor(\varphi, \psi) = \frac{1}{2\pi\sigma_\varphi\sigma_\psi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\varphi-\bar{\varphi})^2}{\sigma_\varphi^2} + \frac{(\psi-\bar{\psi})^2}{\sigma_\psi^2}\right)} \quad (29)$$

donde  $\bar{\varphi}$  y  $\bar{\psi}$  son los valores medios de las variables  $\varphi$  y  $\psi$  , y hemos representado por  $\sigma_\varphi$  y  $\sigma_\psi$  sus desviaciones típicas.

Los datos del programa **NOR2** son,

- Orden de discretización: valor  $N$
- Número de puntos para la integración numérica.
- Densidad de fisuras (número de fisuras/volumen)
- Orientaciones de las fisuras dadas mediante los parámetros de la distribución  $\bar{\varphi}$  ,  $\bar{\psi}$  ,  $\sigma_\varphi$  y  $\sigma_\psi$ .

Los resultados son los coeficientes  $C_{2m,k}$  que aproximan la distribución de microfisuras impresos en el fichero NORMAL2.DAT y en formato binario en NORMAL2.BIN para ser leídos en el programa de cálculo de la evolución de las microfisuras.

En Figura 4-15 se representa la aproximación de orden  $N=10$  de una distribución inicial de fisuras binormal.

#### ***4.6.4. Evolución de una población de microfisuras por convección***

El programa de ordenador **CAL**, cuyo listado se incluye en el Apéndice 3, calcula la evolución de una población de microfisuras debido a convección pura según la ecuación (1).

La resolución computacional de la anterior ecuación, se realiza mediante la aproximación de la función densidad de microfisuras con funciones armónicas esféricas según se ha descrito en el apartado 4.4

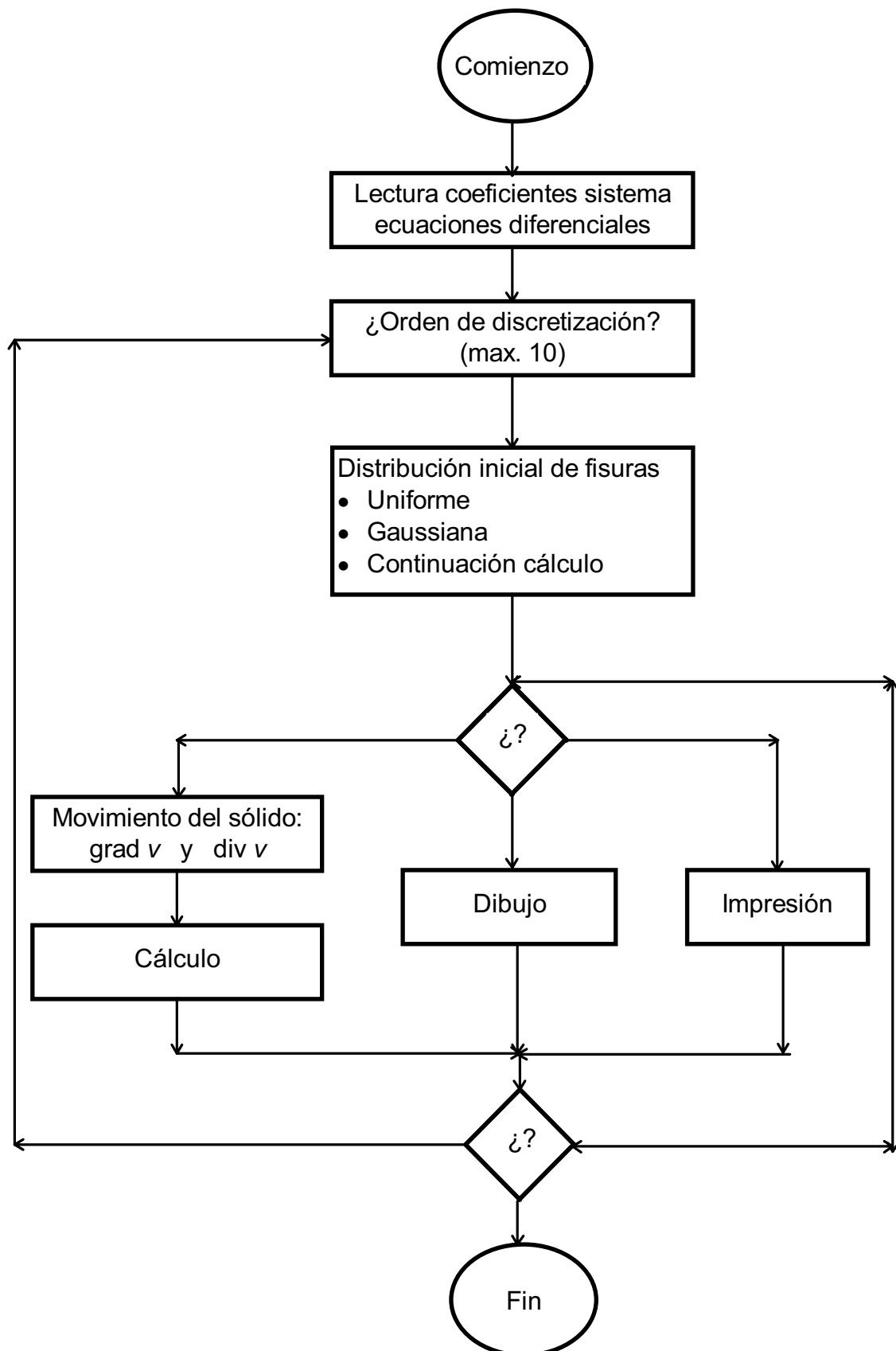
A continuación pasamos a describir el programa **CAL** cuyo organigrama incluimos seguidamente en la Figura 4-6.

##### ***4.6.4.1. Coeficientes del sistema de ecuaciones diferenciales***

El programa empieza leyendo el fichero SPHCOEF.10 que contiene los coeficientes constantes, matriz A, del sistema de ecuaciones diferenciales (16). Dicha matriz se ha calculado mediante el programa **GEN** descrito anteriormente.

##### ***4.6.4.2. Orden de discretización***

A continuación se especifica el orden de la discretización a utilizar en los cálculos. Aunque el valor máximo a considerar es 10 (que corresponde al mayor orden calculado en **GEN**) y será utilizado en ejemplos posteriores, una implementación realista del método en un modelo de material, posiblemente exigiría, por coste computacional, considerar ordenes de discretización inferiores.



**Figura 4-6** Organigrama del programa **CAL**

#### 4.6.4.3. Distribución inicial de microfisuras

La siguiente información a introducir en el programa consiste en detallar la población inicial de fisuras a considerar en el análisis. En nuestro caso contemplamos las siguientes opciones:

- Poblaciones de fisuras con distribución uniforme en orientación.
- Poblaciones de fisuras con orientaciones preferentes caracterizadas mediante distribuciones gaussianas. Estas distribuciones se aproximan mediante combinaciones lineales de armónicos esféricos, cuyos coeficientes se calculan mediante el programa **NOR2** descrito anteriormente.
- Continuación a partir de la distribución final de fisuras correspondientes a un cálculo anterior

Los datos solicitados por el programa son el tipo de distribución y el número de fisuras por unidad de volumen de material:

Distribución inicial población de fisuras:

- 1** = Uniforme (0,0)
- 2** = Armónico esférico de orden (f,k)
- 3** = Gaussiana en dirección Phi Y Psi
- 4** = Continuación a partir calculo anterior

Introducir tipo de distribución (1,2,3,4) = **1**

Densidad de fisuras (Núm. Fisuras/Volumen) = **1000.**

En el menú anterior la opción **2** no tiene sentido a efectos de distribución de fisuras pues la integral de dicha función en el dominio  $\varphi \in [0, 2\pi]$  y  $\psi \in [0, \pi]$ , que corresponde al número de fisuras por unidad de volumen de sólido, es nula pero se ha incluido a efectos de representación gráfica de los distintos armónicos esféricos.

La opción **3** nos presenta un listado con las distribuciones ya descompuestas en armónicos esféricos en el programa **NOR2** para su elección.

#	Dis.	PSImed	PSIvar	PHImed	PHIvar	Fis/vol	Fmax	Puntos
<b>1</b>		45.00	10.00	180.00	10.00	1.	10	1000
<b>2</b>		.00	15.00	180.00	999.00	1.	10	1000
<b>3</b>		45.00	10.00	.00	30.00	1.	10	1000
<b>4</b>		45.00	15.00	180.00	30.00	1.	10	1000

Elegir numero de distribución = **4**

La última opción nos permite continuar calculando la evolución de la población de fisuras en instantes posteriores, ya sea con el mismo tipo de movimiento o especificando uno diferente.

#### 4.6.4.4. Movimiento del sólido

Posteriormente se especifica el movimiento a considerar en el estudio de la evolución de las microfisuras. Este movimiento viene definido para nuestro problema mediante el  $\text{grad } \vec{v}$  y  $\text{div } \vec{v}$  donde  $\vec{v}$  es el vector velocidad.

En este programa hemos incluido los casos de cortante simple, tracción y rotación según los ejes de coordenadas X, Y y Z pero podría ser cualquier otro movimiento. De hecho, en su implementación en un programa de elementos finitos, dicho movimiento sería un valor proveniente del cálculo en cada paso de integración.

Los datos solicitados por el programa son:

Velocidad de deformación o rotación (1/Seg.) = **1000.**

Movimiento del sólido

- 1** = Cortante simple en plano YZ según Y
- 2** = Cortante simple en plano YZ según Z
- 3** = Cortante simple en plano XZ según X
- 4** = Cortante simple en plano XZ según Z
- 5** = Cortante simple en plano XY según X
- 6** = Cortante simple en plano XY según Y
- 7** = Tracción según eje X
- 8** = Tracción según eje Y
- 9** = Tracción según eje Z
- 10** = Rotación según eje X
- 11** = Rotación según eje Y
- 12** = Rotación según eje Z

Introducir tipo de movimiento (1 a 12) = **1**

Para cada tipo de movimiento el programa asigna los valores correspondientes de  $\text{grad } \vec{v}$  y  $\text{div } \vec{v}$  (véase rutina MOVIMI en el Apéndice 3).

#### 4.6.4.5. Integración de las ecuaciones de evolución

El cálculo propiamente dicho consiste en la integración del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (16). Las condiciones iniciales del sistema están implícitas en la descripción de la población inicial de fisuras (coeficientes  $C_{2n,l}$  en el instante inicial). Por ello, aparte del movimiento del sólido ya considerado, únicamente es necesario especificar la duración del análisis, el paso de integración  $\Delta t$  y el método de integración lo cual es requerido por el programa:

```
Tiempo comienzo del análisis      =      .0000
Tiempo fin análisis                =      2.0E-3
Paso de integración (Dt)           =      1.0E-6
Número de Ciclos (< 0 Termina)=      2000
```

```
Método de integración
  1=Euler
  2=Diferencia Central
  3=Runge-Kutta de 5 orden
```

```
Introducir método (1/2/3)         =      3
```

```
Criterio de convergencia          =      1.0E-5
```

En los programas de análisis dinámico de estructuras, el paso de integración de las ecuaciones del movimiento puede ser fijado por el usuario o, en la mayoría de los programas modernos, calculado automáticamente.

En los fenómenos de dinámica lenta el paso de integración, suele estar limitado por los siguientes factores:

- frecuencias propias de la estructura (y por lo tanto de su rigidez).
- rango de las frecuencias de interés en la respuesta.
- variación temporal de las cargas aplicadas.
- criterio de convergencia de las rutinas de materiales no lineales (normalmente basados en deformaciones y/o tensiones).
- grandes desplazamientos.

En los procesos de dinámica rápida, como fenómenos de explosiones o impacto, en que el paso de integración suele ser varias ordenes de magnitud menor al correspondiente a la dinámica convencional, el factor fundamental es el tiempo que tarda la propagación de las ondas en los elementos de menor tamaño.

Al no estar estas rutinas integradas en un programa de análisis tensional, el paso de integración ha de ser especificado por el usuario.

Se han implementado tres métodos numéricos de integración que pasamos a describir:

### Método de Euler

Representamos de una manera compacta el sistema de ecuaciones diferenciales (16) mediante la expresión  $\frac{d\bar{c}}{dt} = \bar{f}(\bar{c}, t)$  donde la dependencia temporal se produce a través de la velocidad.

La formula de Euler calcula la solución del sistema en el instante  $(n+1)$  a partir de la solución en el instante  $n$  usando únicamente el valor de la derivada al principio del intervalo mediante,

$$\bar{c}_{n+1} = \bar{c}_n + \Delta t \bar{f}(\bar{c}_n, t_n) \quad (30)$$

Este método al ser una aproximación de *primer orden*<sup>5</sup> no es muy exacto y para garantizar su estabilidad son necesarios  $\Delta t$  pequeños.

### Método de la diferencia central

Consiste en hacer un incremento  $\Delta t$  como en el método de Euler para aproximar el valor de  $\bar{c}$  en el punto medio del intervalo, que representaremos por  $\bar{c}_{n+1/2}$ , mediante las ecuaciones,

$$\bar{c}_{n+1/2} = \bar{c}_n + \frac{\Delta t}{2} \bar{f}(\bar{c}_n, t_n) \quad (31)$$

Se avanza la solución en el instante  $(n+1)$  a partir del valor estimado de la derivada en el punto medio,

$$\bar{c}_{n+1} = \bar{c}_n + \Delta t \bar{f}(\bar{c}_{n+1/2}, t_{n+1/2}) \quad (32)$$

Este método es de *segundo orden* y el coste computacional también es bajo por lo cual debe preferirse al anterior.

Este método es especialmente indicado en programas tipo DYNA [56] donde la velocidad  $v$  es calculada, en el punto medio del intervalo, a partir de las aceleraciones en los nodos, que son las incógnitas principales con la relación,

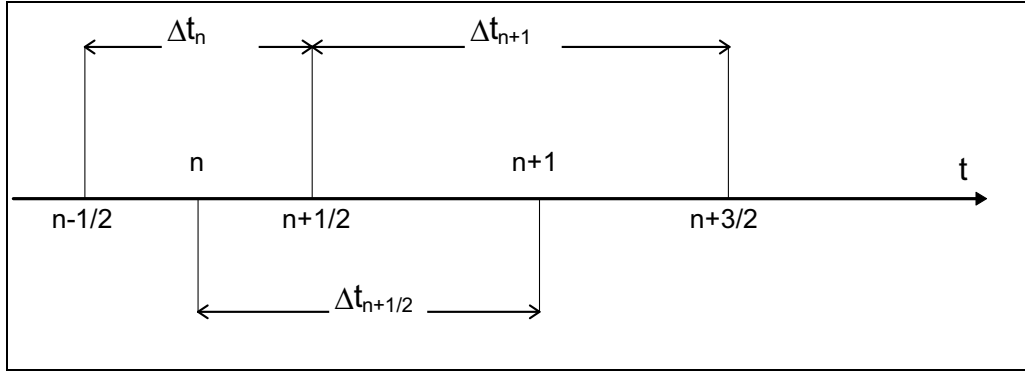
$$v_{n+1/2} = v_{n-1/2} + a_n \Delta t_n \quad (33)$$

y los desplazamientos se obtienen mediante,

---

<sup>5</sup>Un método se dice que es de orden  $n$  si su error es  $O(\Delta t^{n+1})$





**Figura 4-7** Método de integración en el programa DYNA

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1/2} \Delta t_{n+1/2} \quad (34)$$

donde  $v$  y  $x$  son, respectivamente las velocidades y desplazamientos nodales y

$$\Delta t_{n+1/2} = \frac{\Delta t_n + \Delta t_{n+1}}{2} \quad (35)$$

### Método de Runge-Kutta

Se ha implementado un método tipo Runge-Kutta de quinto orden con control adaptativo del paso de integración. Esta capacidad de modificar el paso de integración en función de un criterio de precisión es útil en nuestro caso, donde las únicas incógnitas son los coeficientes  $\bar{c}$  ya que el movimiento del material lo suponemos conocido.

El criterio de convergencia consiste en fijar un  $\varepsilon$  que, multiplicado por el valor de los coeficientes  $\bar{c}$ , sea el máximo error admisible en dichos coeficientes para cada paso de integración.<sup>6</sup> Se consideran valores de  $\varepsilon$  comprendidos entre  $10^{-4}$  y  $10^{-6}$ .

Los detalles del método se pueden consultar en las páginas 704 a 716 de Press William H. y otros (1992) [103] de donde se han tomado también las rutinas de integración.

Una vez terminada la integración de las ecuaciones, el usuario puede visualizar o imprimir la distribución de microfisuras, en cada paso de integración, así como continuar el cálculo con el mismo movimiento o uno distinto.

<sup>6</sup>Excepto para valores próximos a cero donde, para evitar la singularidad, el error se toma respecto al incremento del coeficiente.

#### ***4.6.4.6. Representación gráfica de resultados***

Al final de cada cálculo se puede representar gráficamente la distribución de fisuras en cada instante  $t$  o número de paso de integración deseado.

El dibujo se realiza mediante las rutinas del módulo **DIB** incluido en el Apéndice 3 que representa en pantalla o papel la distribución de fisuras en ejes  $\varphi$  y  $\psi$ .

Este módulo utiliza las subrutinas básicas de dibujo de la biblioteca de rutinas gráficas DIGLIB [17] desarrolladas para ordenadores VAX de la compañía Digital Equipment Corporation (DEC)

Dichas rutinas tuvieron que ser adaptadas para ordenadores tipo PC y los siguientes dispositivos de dibujo:

- pantallas gráficas tipo EGA, VGA y SVGA,
- trazadores y impresoras que admitan el lenguaje HPGL.

De estas rutinas, dado su volumen y escasa relevancia para la tesis no se han incluido listados.

#### ***4.6.4.7. Impresión de resultados***

Con el fin de tener la evolución temporal de las magnitudes más significativas de la distribución de fisuras se ha previsto la impresión resultados.

El usuario del programa puede especificar la cadencia de impresión por ciclos (pasos de integración) como se muestra en la Figura 4-8 donde se incluye la entrada de datos y la impresión de resultados.

Muestra historia de pasos ya calculados

Desde paso numero = 1

Hasta paso (max 107) = 107

Incremento = 5

Suma de Féjer (1=Sí,0=No) = 1

Max.	Phi Psi	Min.	Phi Psi Ciclo	Tiempo	Dt	----- Coeficientes de los armónicos esféricos -----															
						(0, 0)	(1,-2)	(1,-1)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(2,-4)	(2,-3)	(2,-2)	(2,-1)	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	
22.448	0 0	22.4484	0 0	1	0.00E+00	0.00E+00	79.58	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	
23.400	90 45	21.5346	270 45	6	2.81E-05	5.65E-06	79.58	.00	-1.71	-.02	.00	-.02	.00	.00	.00	-.02	.00	-.02	.00	.00	
24.558	90 45	20.5182	270 45	11	6.07E-05	6.45E-06	79.58	.00	-3.69	-.08	.00	-.08	.00	.00	.01	-.08	.00	-.09	.00	.00	
26.231	90 48	19.2058	270 42	16	1.05E-04	1.01E-05	79.58	.00	-6.40	-.25	.00	-.24	.00	.02	.03	-.24	.00	-.27	.00	.00	
27.537	90 48	18.2920	270 42	21	1.38E-04	5.47E-06	79.58	.00	-8.38	-.43	.00	-.41	.00	.04	.08	-.42	.00	-.46	.00	.00	
28.632	90 48	17.5896	270 42	26	1.65E-04	5.39E-06	79.58	.00	-9.96	-.61	.00	-.58	.00	.06	.13	-.59	.00	-.65	.00	.00	
30.125	90 48	16.7143	270 42	31	1.99E-04	8.01E-06	79.58	.00	-12.02	-.90	.00	-.85	.00	.11	.23	-.85	.00	-.94	.00	.01	
32.234	90 48	15.6134	270 42	36	2.46E-04	9.89E-06	79.58	.00	-14.73	-1.35	.00	-1.29	.00	.21	.42	-1.28	.00	-1.41	.00	.01	
34.574	90 48	14.5463	270 42	41	2.94E-04	7.51E-06	79.58	.00	-17.52	-1.93	.00	-1.84	.00	.35	.71	-1.79	.00	-1.99	.00	.03	
36.720	90 51	13.6856	270 39	46	3.36E-04	9.69E-06	79.58	.00	-19.88	-2.49	.00	-2.38	.00	.51	.00	1.04	-2.29	.00	-2.54	.00	.04
39.956	90 51	12.5679	270 39	51	3.94E-04	1.28E-05	79.58	.00	-23.10	-3.40	.00	-3.25	.00	.82	.00	1.65	-3.06	.00	-3.40	.00	.08
44.226	90 51	11.3369	270 39	56	4.65E-04	1.49E-05	79.58	.00	-26.90	-4.67	.00	-4.47	.00	1.31	.00	2.64	-4.07	.00	-4.55	.00	.15
49.560	90 54	10.0803	270 36	61	5.46E-04	1.74E-05	79.58	.00	-31.04	-6.32	.00	-6.07	.00	2.05	.00	4.13	-5.29	.00	-5.94	.00	.27
56.779	90 54	8.7753	270 36	66	6.43E-04	2.08E-05	79.58	.00	-35.63	-8.53	.00	-8.23	.00	3.18	.00	6.39	-6.73	.00	-7.61	.00	.50
66.330	90 54	7.4417	270 33	71	7.60E-04	2.52E-05	79.58	.00	-40.65	-11.47	.00	-11.14	.00	4.91	.00	9.80	-8.33	.00	-9.52	.00	.92
80.036	90 57	6.1159	270 33	76	9.00E-04	3.04E-05	79.58	.00	-45.96	-15.33	.00	-15.00	.00	7.45	.00	14.79	-9.86	.00	-11.45	.00	1.67
98.186	90 60	4.8848	270 30	81	1.06E-03	3.24E-05	79.58	.00	-51.09	-20.07	.00	-19.85	.00	10.94	.00	21.51	-10.86	.00	-12.94	.00	2.92
118.341	90 60	3.9652	270 30	86	1.22E-03	3.14E-05	79.58	.00	-54.96	-24.67	.00	-24.65	.00	14.58	.00	28.40	-10.90	.00	-13.43	.00	4.50
139.540	90 63	3.2532	270 30	91	1.37E-03	3.13E-05	79.58	.00	-57.78	-28.95	.00	-29.25	.00	18.13	.00	35.01	-10.11	.00	-13.02	.00	6.33
170.206	90 63	2.4959	270 30	96	1.56E-03	4.72E-05	79.58	.00	-60.41	-34.36	.00	-35.22	.00	22.75	.00	43.38	-7.98	.00	-11.29	.00	9.16
209.283	90 66	1.8487	270 27	101	1.78E-03	4.13E-05	79.58	.00	-62.15	-39.92	.00	-41.60	.00	27.55	.00	51.76	-4.44	.00	-8.05	.00	12.76
248.910	90 69	.7353	270 42	106	2.00E-03	5.15E-05	79.58	.00	-62.93	-45.19	.00	-47.90	.00	32.02	.00	59.23	.16	.00	-3.57	.00	16.89

Calcular/Dibujar/Listar/Otra/Fin? (1/2/3/4/5)= 5

Figura 4-8 Salida impresa del programa CAL

## 4.7. Ejemplos numéricos

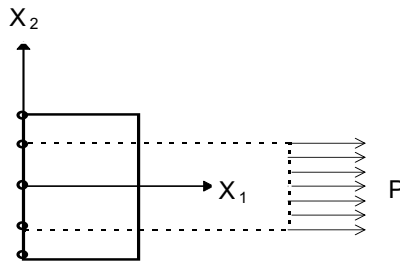
En este apartado se presenta la resolución numérica de varios casos de convección de microfisuras.

Estos ejemplos tienen como principal propósito ilustrar la bondad de los métodos desarrollados en este capítulo. Se incluyen los casos tipo estudiados en la Mecánica del Continuo de deformaciones debidas a tracción, cortante y movimiento de sólido rígido.

### 4.7.1. Tracción

Consideramos un sólido genérico que representaremos simbólicamente mediante un cubo, cuyas aristas son paralelas a los planos coordenados de un sistema cartesiano  $(X_1, X_2, X_3)$ . Véase Figura 4-9.

Si aplicamos una carga en dirección del eje  $X_1$ , suponiendo libres los desplazamientos transversales a dicha dirección, el campo espacial de velocidades está representado por,

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha X_1 \\ v_2 &= -\nu \alpha X_2 \\ v_3 &= -\nu \alpha X_3 \end{aligned}$$


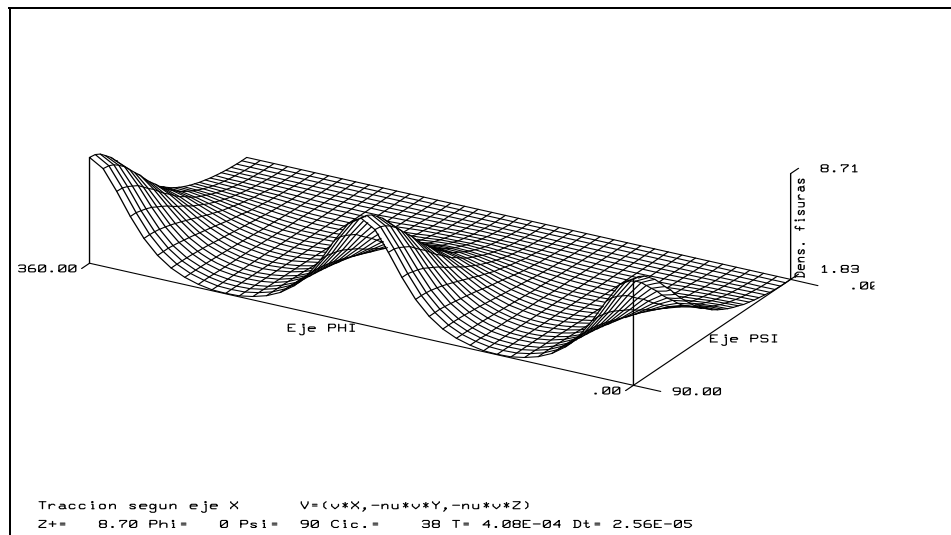
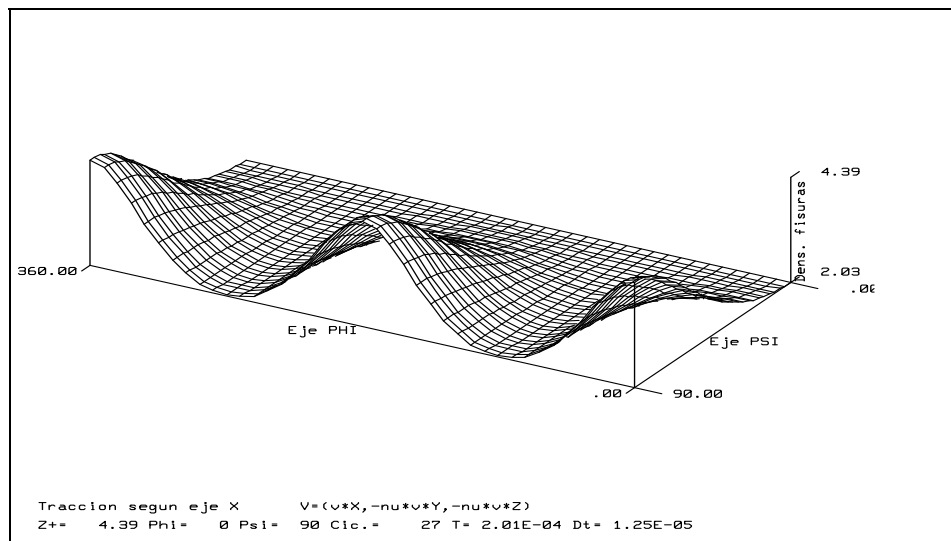
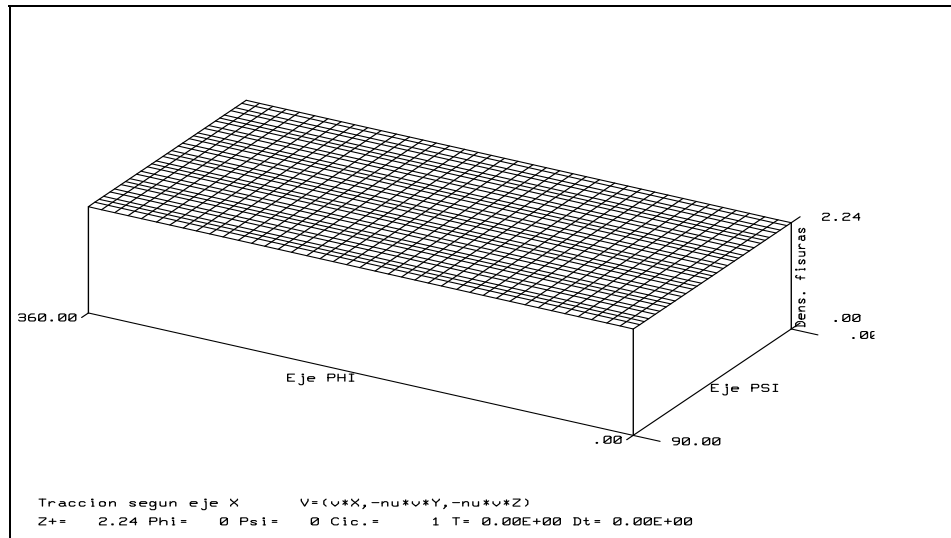
**Figura 4-9** Tracción según eje  $X_1$

donde  $\alpha$  es una constante, y  $\nu$  es el coeficiente de Poisson<sup>7</sup>; y por lo tanto el gradiente y la divergencia de la velocidad vienen dados por,

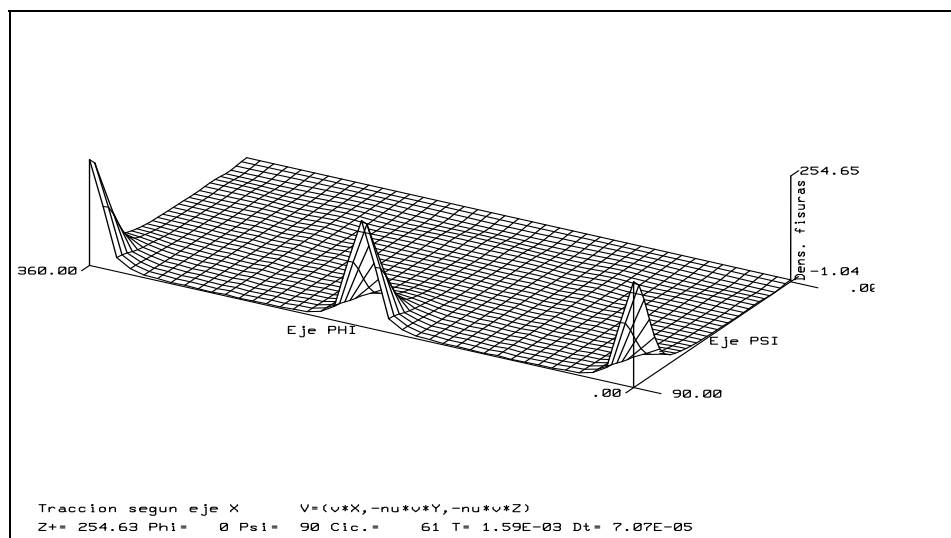
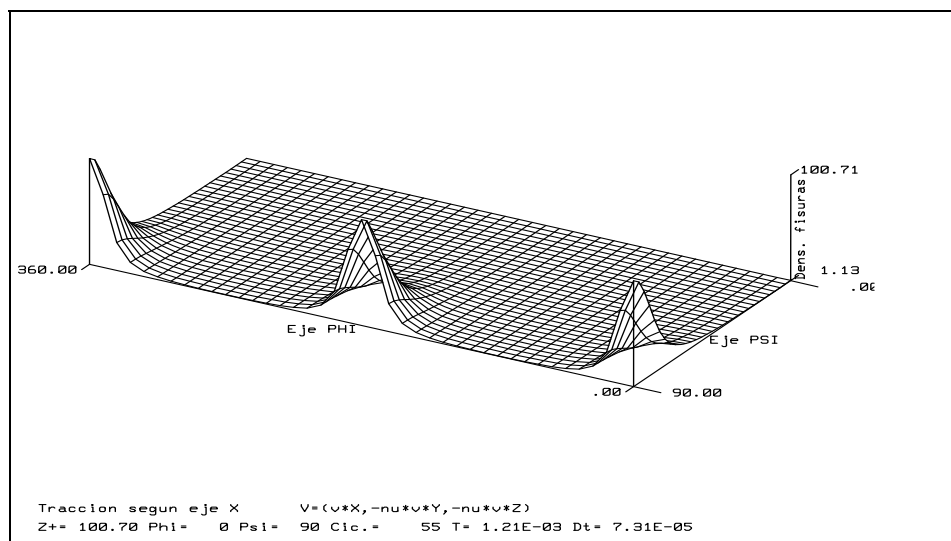
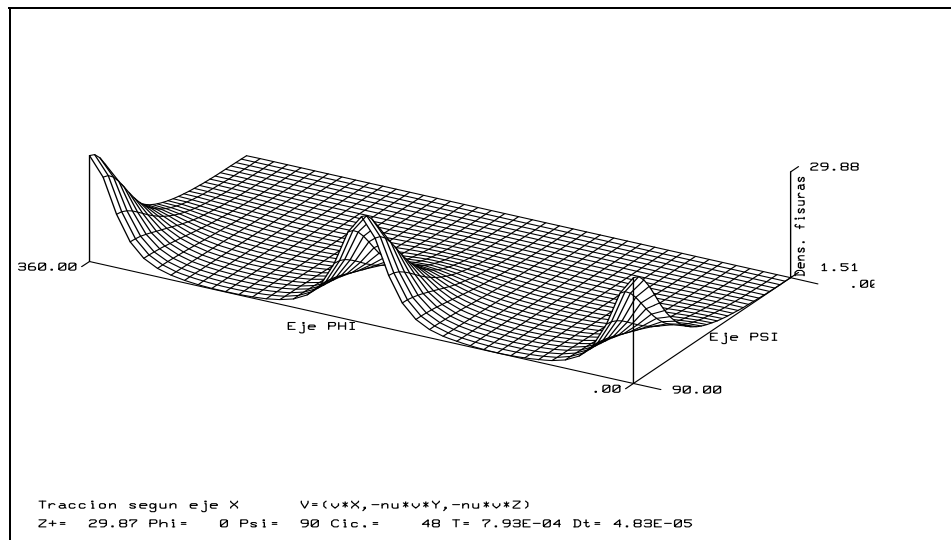
$$\text{grad } \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \alpha \end{pmatrix} \quad \text{div } \vec{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \alpha(1 - 2\nu) \quad (36)$$

Suponemos una población inicial de microfisuras con distribución uniforme (representada en la Figura 4-10a) y sometemos al sólido al movimiento de alargamiento anteriormente descrito. En la Figura 4-10 y la Figura 4-11 se muestra la evolución de dicha población para deformaciones según el eje  $X_1$  del 20%, 40%, 80%, 120% y 160%

<sup>7</sup>El coeficiente de Poisson es una característica del material. En este ejemplo se ha tomado el valor  $\nu=0.3$ , que es un valor representativo de varios materiales.



**Figura 4-10** Tracción según  $X_1$ . Distribución inicial y su evolución para una deformación del 20% y 40%



**Figura 4-11** Tracción según  $X_1$  (cont.). Distribución de microfisuras para deformación del 80%, 120% y 160%.

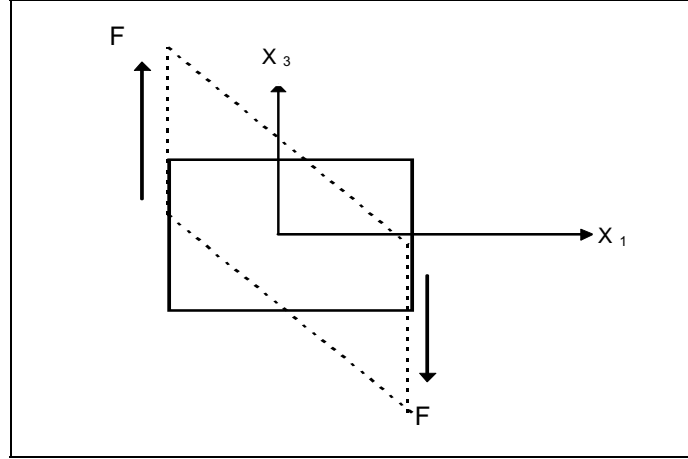
#### 4.7.2. Cortante simple.

Consideramos el caso de cortadura simple en el plano  $X_1X_3$  según eje  $X_3$ , el cual se representa en la Figura 4-12. El campo espacial de velocidades correspondiente a este caso viene dado por,

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = 0$$

$$v_3 = \alpha X_1$$



**Figura 4-12** Cortante en plano  $X_1X_3$  según eje  $X_3$

donde  $\alpha$  es una constante, y por lo tanto el gradiente y la divergencia de la velocidad tienen el valor,

$$\text{grad } \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{div } \vec{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (37)$$

Suponemos una población de microfisuras con distribución inicial uniforme como la mostrada en la Figura 4-13a. La evolución de la población de microfisuras debidas al movimiento anteriormente descrito se muestra en la Figura 4-13 y Figura 4-14.

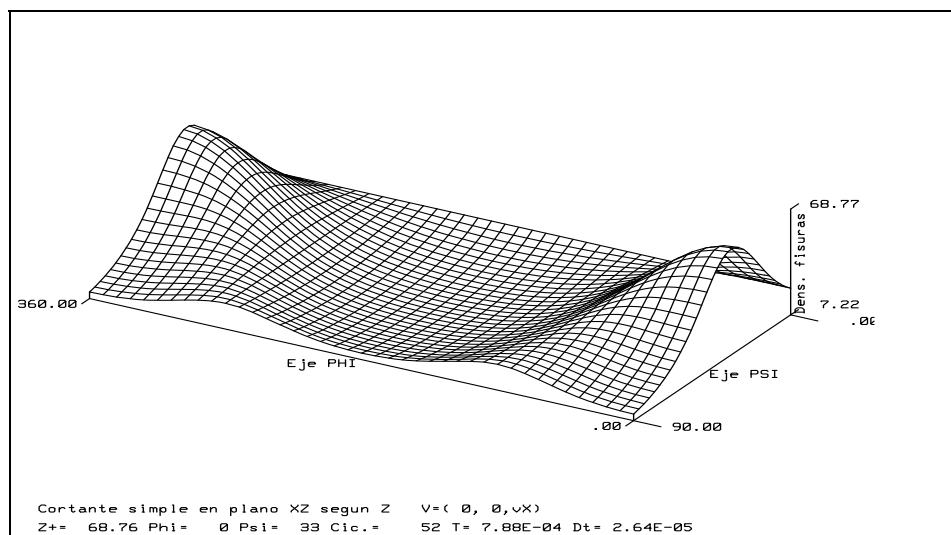
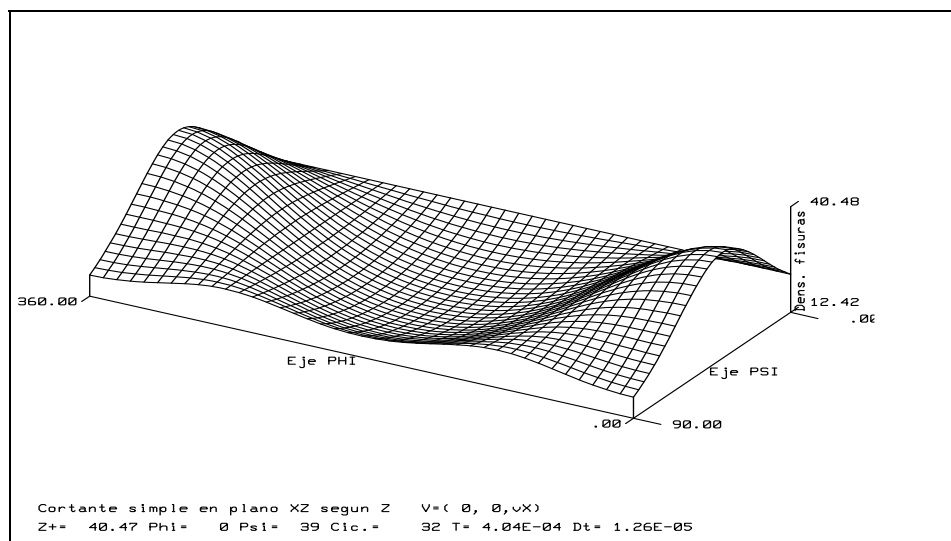
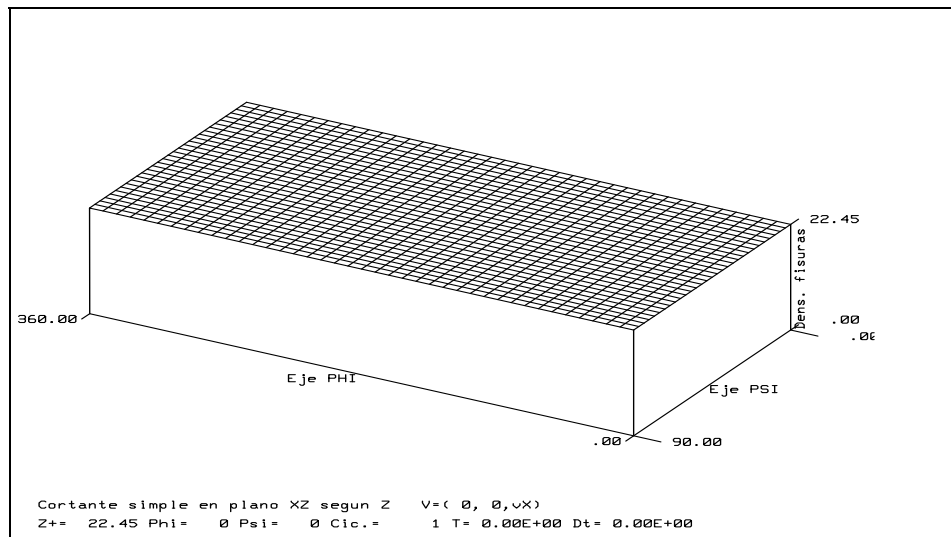
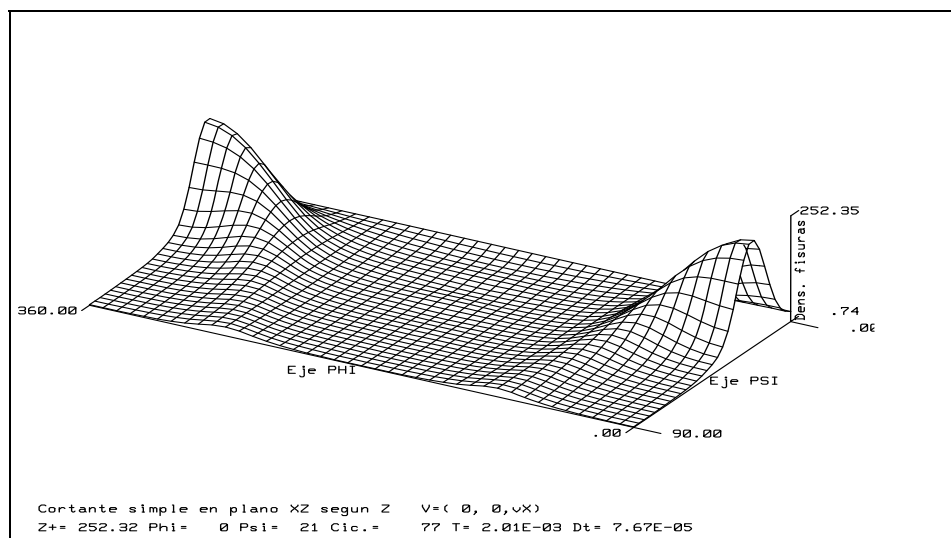
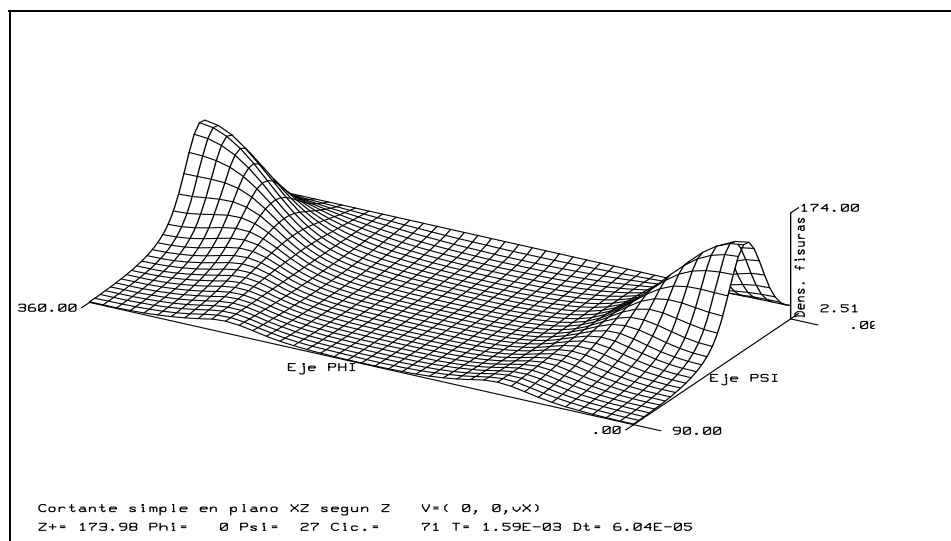
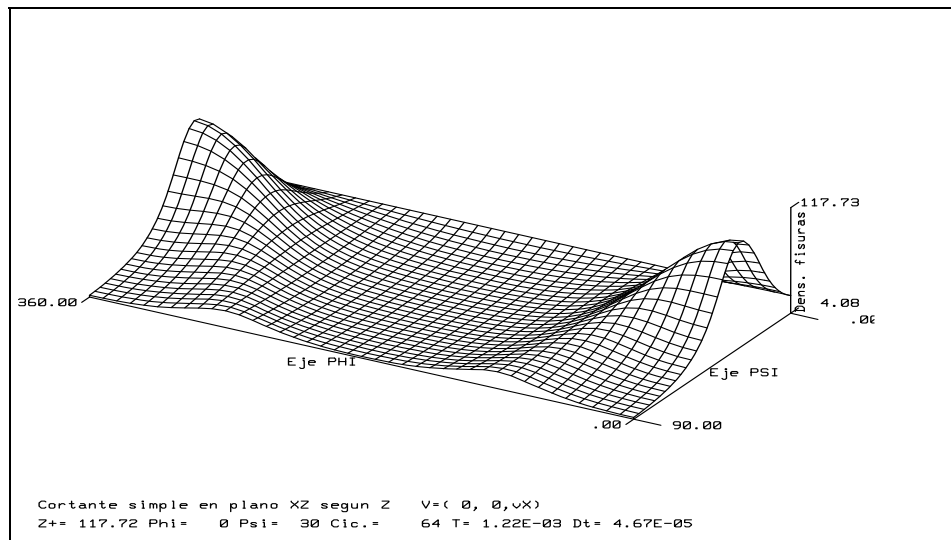


Figura 4-13 Evolución de una población uniforme de microfisuras por cortante en el plano  $X_1X_3$  según eje  $X_3$





**Figura 4-14** Evolución de una población uniforme de microfisuras por cortante en el plano  $X_1X_3$  según eje  $X_3$  (cont.)

### 4.7.3. Movimiento de sólido rígido

Como una muestra de que el modelo presentado en este capítulo conserva la distribución de microfisuras en los movimientos de sólido rígido, vamos a considerar un movimiento de rotación según el eje  $X_1$ .

Para este ejemplo supondremos que la población inicial de microfisuras sigue una distribución binormal de media  $(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) = (45^\circ, 180^\circ)$  desviación típica  $(\sigma_\varphi, \sigma_\psi) = (10^\circ, 30^\circ)$ . En la Figura 4-15 se representa dicha distribución.

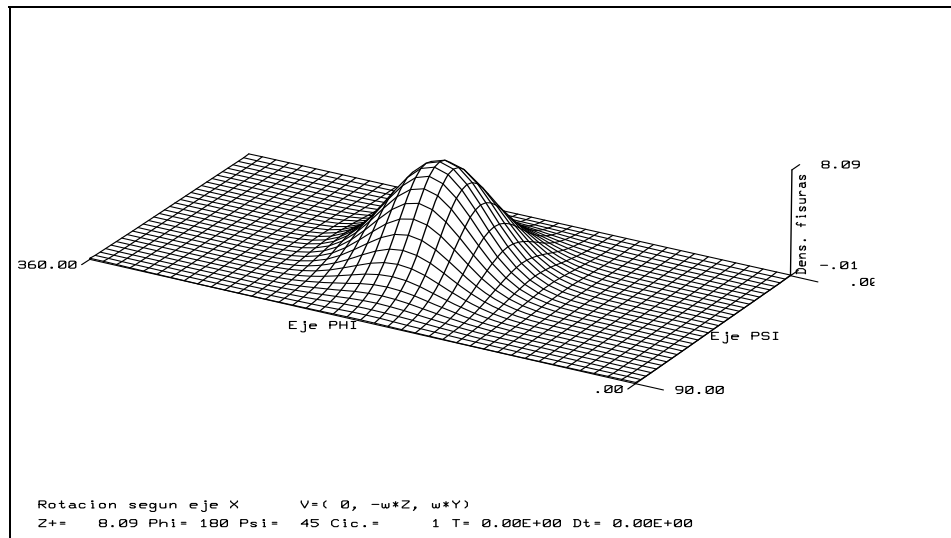
Si consideramos una velocidad de rotación alrededor del eje  $X_1$  constante y la representamos por  $\omega$ , el campo de velocidades espacial vendrá expresado por,

$$\vec{v} = (0, -\omega X_3, \omega X_2) \quad (38)$$

Por lo tanto el gradiente y la divergencia de la velocidad vienen definidos por,

$$\text{grad } \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix} \quad \text{div } \vec{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (39)$$

Se ha estudiado la convección de la anterior población de microfisuras para una rotación completa alrededor del eje  $X_1$ . Los resultados del cálculo efectuado se muestran en la Figura 4-16 y Figura 4-17 para las posiciones intermedias de  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $300^\circ$  y para una rotación completa de  $360^\circ$ . Se puede observar que la población de microfisuras no se ha modificado.



**Figura 4-15** Población inicial de microfisuras para el caso de rotación alrededor del eje  $X_1$

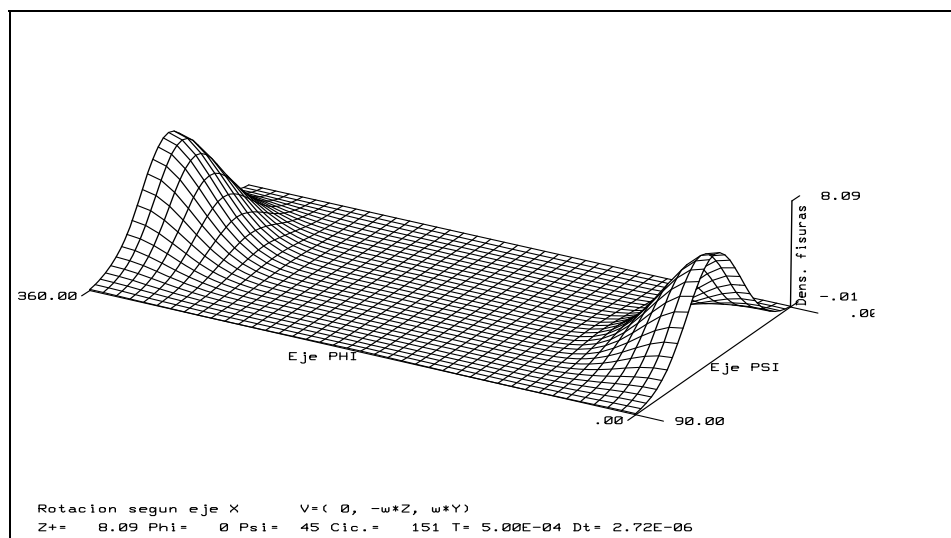
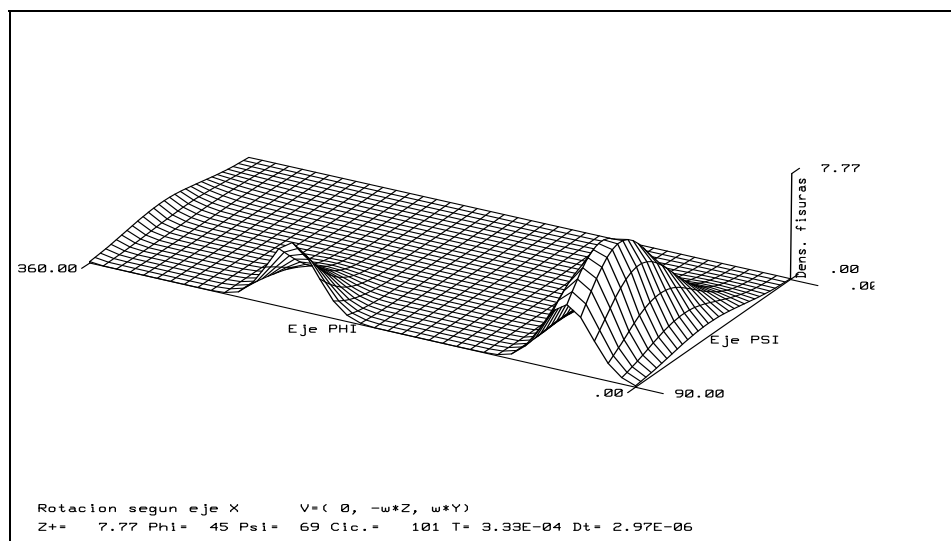
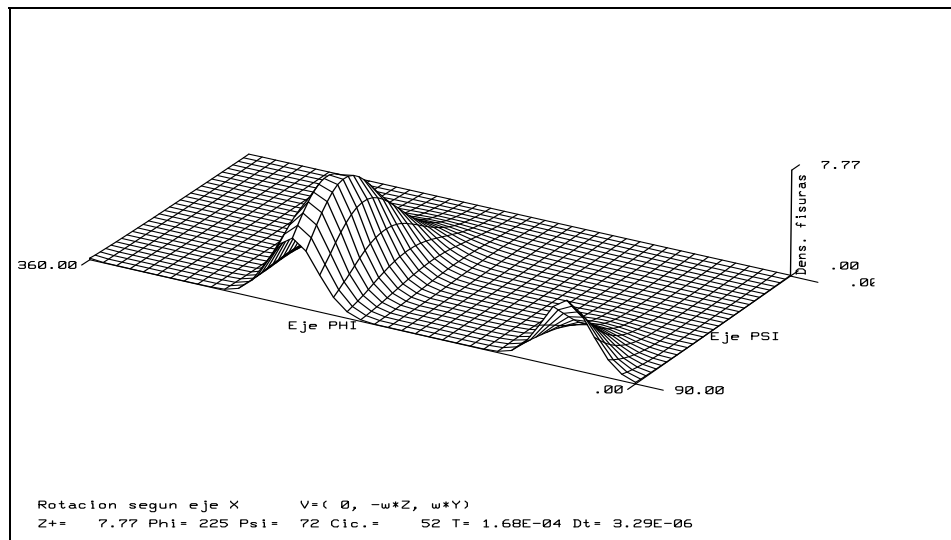
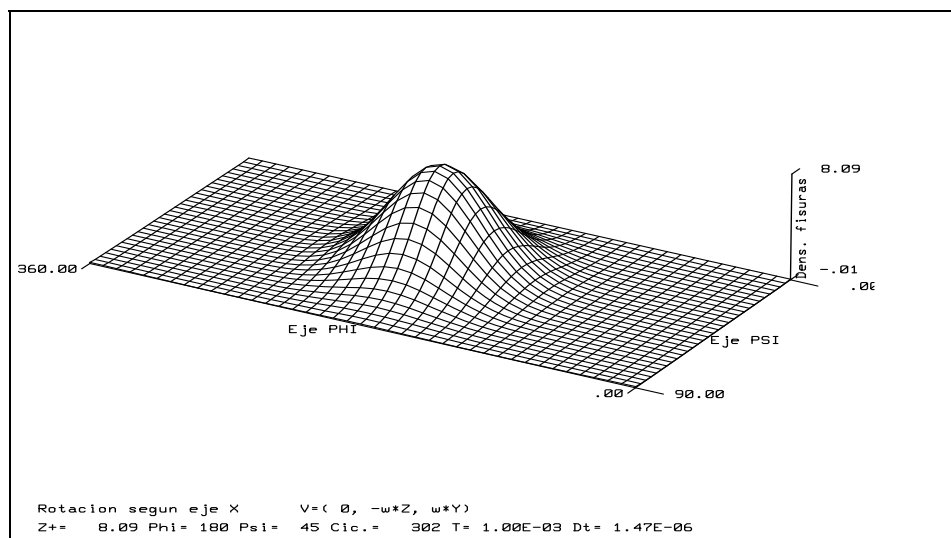
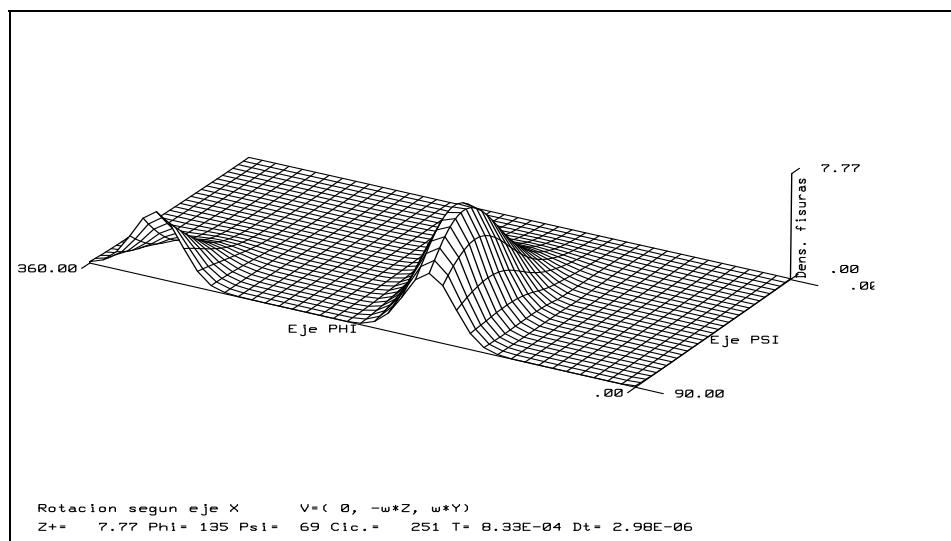
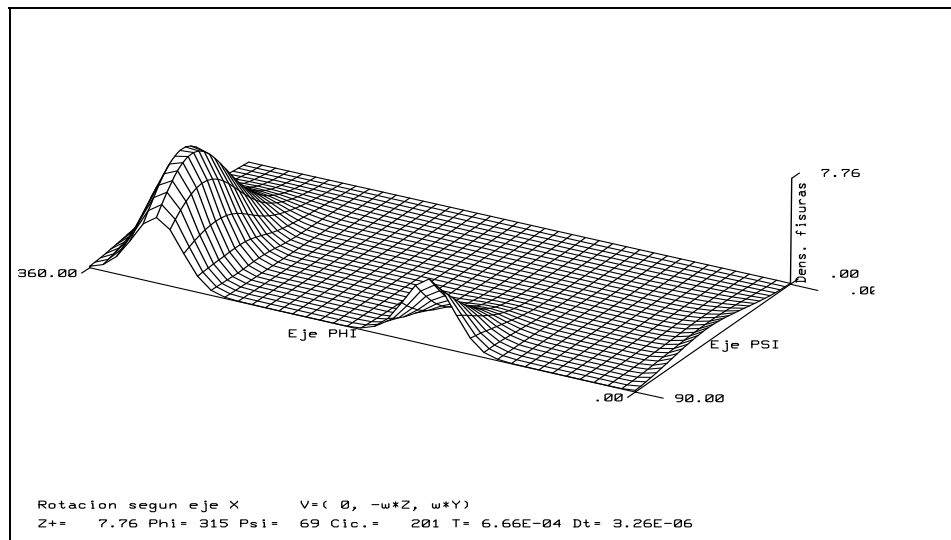


Figura 4-16 Distribución de microfisuras para rotaciones alrededor del eje  $X_1$  de 60°, 120° y 180°.



**Figura 4-17** Distribución de microfisuras para rotaciones alrededor del eje  $X_1$  de  $240^\circ$ ,  $300^\circ$  y  $360^\circ$ .

## 5. CONCLUSIONES

En esta Tesis se han puesto las bases teóricas, numéricas y computacionales para la formulación de un modelo micromecánico de material fisurable, en tres dimensiones y con comportamiento frágil.

Hasta el presente, este tipo de materiales se estudiaba habitualmente mediante modelos fenomenológicos en los que el deterioro del material debido a las fisuras, se consideraba mediante las llamadas variables ocultas o internas.

Este modelo aplica los métodos de la Mecánica de la Fractura a las microfisuras, que dado el gran número de ellas, se tratan mediante distribuciones estadísticas dependientes de sus tamaños y orientaciones con las que se pueden modelizar adecuadamente la nucleación, el crecimiento y su distribución espacial.

Se establecen las ecuaciones de evolución de la población de microfisuras, en la forma de un ritmo temporal, de una densidad escalar. Técnicamente, la conclusión más importante es la objetividad de ese ritmo, consecuencia en parte de la elección del lenguaje matemático adecuado para describir la distribución de fisuras en el sólido y su evolución.

Esta objetividad es exigencia de cualquier ecuación constitutiva de un sistema material continuo y permite completar la formulación del modelo micromecánico 3-D del material fisurable, objetivo de la primera parte de la Tesis.

Para ello, se ha considerado una familia uniparamétrica de variedades  $V = (V_t)$  con  $t$  el tiempo, definidas por  $V_t = B_t \times R^+ \times S_n$  y para cada instante  $t$  y cada punto material  $X$  se ha definido la densidad  $h$  de microfisuras de tamaño  $r$  y orientación  $\vec{n}$  que define una distribución sobre la variedad  $R^+ \times S_n$  de modo que el número de microfisuras por unidad de volumen de sólido que tienen en ese instante y en ese punto un tamaño  $r$  entre  $r_1$  y  $r_2$  y normales  $\vec{n}$  en una parte  $P$  de  $S_n$  es

$$\psi(t, X) = \int_{(r, \vec{n}) \in [r_1, r_2] \times P} h(t, r, \vec{n}) dr \wedge d\sigma$$

y claro es, el número total de microfisuras en una parte  $\mathcal{D}$  del sistema en movimiento vendrá dado por,

$$F(\mathcal{D}) = \int_{X \in \mathcal{D}} \psi(t, X) dv_X$$

$(r, \vec{n}) \rightarrow h(t, r, \vec{n})$  es una 3-forma diferencial en la 3-variedad  $R^+ \times S_n$ , luego una densidad escalar y por tanto objetiva.

Se ha definido también en  $R^+ \times S_n$  el campo vectorial contravariante dependiente del tiempo  $(W, \vec{w})$  en donde  $W$  es la velocidad de crecimiento de la magnitud  $r$ , que mide el tamaño de la microfisura y  $w(\vec{n})$  expresa la velocidad de variación de la normal, cuando la fisura es arrastrada por el material en su evolución. Este campo nos permite hacer la convección de  $h$ , definiendo una tasa de variación de  $h$  respecto al tiempo, que es objetiva como consecuencia de la objetividad de  $h$  y de que ese ritmo temporal es la derivada de Lie de  $h$  respecto a  $(W, \vec{w})$ .

El ritmo de evolución de microfisuras expuesto en el capítulo 2, se particulariza a dos situaciones :

- Poblaciones de microfisuras paralelas entre sí, pero considerando crecimiento y nucleación de las mismas.
- Evolución de poblaciones de microfisuras con orientaciones cualesquiera, pero sin nucleación ni crecimiento.

En ambos casos, con el fin de poder seguir la evolución temporal de la población de microfisuras, con un coste computacional aceptable, se aproxima numéricamente la función densidad de fisuras, transformando la ecuación de evolución en derivadas parciales en un sistema de ecuaciones diferenciales.

En el primer caso, población de microfisuras paralelas, en vez de seguir la evolución en el tiempo de la función densidad de fisuras, se estudia el ritmo temporal de sus momentos estadísticos. Se indica claramente como se puede incorporar el método en un modelo de material en un programa de elementos finitos y se proporcionan los organigramas y las subrutinas, en lenguaje Fortran standard, necesarios.

En el segundo estudio, convección de microfisuras, se aproxima a la función densidad de orientaciones  $N(t, \vec{n})$  mediante funciones armónicas esféricas. Dicha aproximación se ha implementado en una serie de subrutinas Fortran, preparadas para su inclusión en un programa de elementos finitos.

Las anteriores subrutinas de cálculo se han probado en casos simplificados pero suficientemente significativos (tracción, cortante y movimiento de sólido rígido) obteniéndose excelentes resultados.

La utilización de programas de ordenador nos permitirá conocer la evolución del material en el tiempo para distintas distribuciones de fisuras y solicitaciones dinámicas hasta niveles de daño anteriores a la fragmentación.

Se proponen como líneas para investigaciones futuras :

- Implementación completa del modelo de material, en un programa de análisis tensional dinámico de elementos finitos.
- Generalización de la hipótesis de apertura elástica de las fisuras a situaciones de comportamiento viscoelástico y viscoplástico.
- Correlación de simulaciones numéricas con ensayos para contrastar el modelo y obtención de las constantes del material.

## **6. APÉNDICE 1**

### **LISTADOS DE LOS PROGRAMAS DEL CAPÍTULO 3**

<b>6.1 Cálculo de la nucleación.</b>	<b>122</b>
<b>6.2 Cálculo del crecimiento de microfisuras.</b>	<b>124</b>
<b>6.3 Evaluación de la función densidad de microfisuras.</b>	<b>125</b>
<b>6.4 Cálculo de los momentos de los polinomios de Chebyshev</b>	<b>126</b>
<b>6.5 Cálculo de los coeficientes de los polinomios de Chebyshev.</b>	<b>130</b>



En este Apéndice, incluimos los listados de los programas descritos en el capítulo 3.

### 6.1 Cálculo de la nucleación.

La función **RNUC** aquí incluida, calcula la tasa de variación del momento  $k$ -ésimo de las microfisuras nucleadas en el intervalo de tamaños de interés cuando el material es sometido a una tensión normal  $\sigma_n$  normal al plano de las microfisuras. Admite el calculo de momentos enteros y semienteros.

Véase apartado 2 del capítulo 3.

```

C
C      FUNCTION RNUC(K,RA,RB,SN)
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
C      Calcula la tasa de variacion del momento K-esimo de las fisuras
C      nucleadas de tamano (Ra,Rb) cuando el material es sometido a una
C      tension SN normal al plano de las fisuras.
C
C      Argumentos:
C
C          K orden del momento a calcular K= 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3
C
C          Ra,Rb tamano de las fisuras minima y maxima a considerar
C              para el calculo de momentos
C
C          SN  tension normal al plano de las fisuras:
C              SN > 0 traccion
C              SN < 0 compresion
C
C      Propiedades del material:
C
C          T1  coefic. ley de crecimiento de fisuras
C          Kic tenacidad a la fractura
C          Rn  parametro de la funcion de densidad de distribucion
C              de las fisuras nucleadas
C          T4  tasa de nucleacion ( numero de fisuras nucleadas por
C              unidad de volumen y unidad de tiempo)
C          SN0 tension umbral para que se produzca nucleacion ( > 0 )
C          T6  parametro de la ecuacion de nucleacion
C          T7  tamano maximo de las fisuras que se pueden nuclear
C          CRVEL velocidad maxima crecimiento de grietas
C
C      Densidad de numero de fisuras nucleadas por unidad de
C      tiempo (Curran, D. R.; Seaman, L.; Shockey, D.A. (1987)
C      Dynamic Failure of Solids. Physics Reports,
C      vol 147, numeros 5-6 p g 253-388   ec. 5.32)
C
C          Dn(Sn) = T4*( exp((Sn-Sn0)/T6) - 1 )      si Sn > Sn0
C          Dn(Sn) = 0                                si Sn < Sn0
C
C      Funcion densidad de distribucion de las fisuras nucleadas
C
C          n(r) = ----- si (Rc < r < T7)
C                   Rn * (exp(-Rc/Rn) - exp(-T7/Rn))

```

```

C
C
C
C      n(r) =          0                      si r < Rc o r > T7
C
C
C
C
C      Tasa de variacion del momento de las fisuras nucleadas
C      con tamano comprendido entre Ra y Rb
C
C
C      | min(Rb,T7)
C      |
C      Rnuc(k,Ra,Rb,Sn) = Dn(Sn) * | r**k * n(r) * dr
C      |
C      | max(Ra,Rc)
C
C      Variables internas
C      Rc tamano minimo de las fisuras que se pueden nuclear
C      DN densidad de numero de fisuras nucleadas por unidad de tiempo
C
C      Funciones externas
C      GAMMLN log. funcion gamma. Vease Numerical Recipes in Fortran
C      second edition pag. 206-207. Cambridge University Press)
C      GAMMP  funcion gamma incompleta.
C      Vease Numerical Recipes pag. 209-211
C
C      PARAMETER (PI=3.1415926535897932D0,PI4=PI/4.D00)
C      COMMON /PARMAT/T1,KIC,RN,T4,SN0,T6,T7,CRVEL,FISMAX,EX
C      REAL*8 KIC
C      REAL    K,KMAS1
C      REAL GAMMLN,GAMMP
C      RNUC = 0.
C      IF ( SN .LE. SN0 ) RETURN
C      RC = PI4*(KIC/SN)**2
C      IF ( RC .GT. T7 ) RETURN
C      IF ( RB .LE. RC .OR. RA .GE. T7 ) RETURN
C      DN = T4*( EXP( (SN-SN0)/T6 ) - 1.)
C      KMAS1 = K+1.
C      RNUC = DN * RN**K * EXP(GAMMLN(KMAS1)) *
1      ( GAMMP( KMAS1, SNGL(MIN(RB,T7)/RN )) -
2      GAMMP( KMAS1, SNGL(MAX(RA,RC)/RN )) )
3      / (EXP(-RC/RN)-EXP(-T7/RN))
C      RNUC = 0.
C      RETURN
C      END

```

□

## 6.2 Cálculo del crecimiento de microfisuras.

Las funciones **WL** y **WP** calculan la velocidad de propagación de las microfisuras, dependiente de las características del material y de la tensión normal a que están sometidas, de acuerdo a las ecuaciones (10) y (7), respectivamente, del capítulo 3.

```

C
  FUNCTION WP(R,RC,RW,A,B)
C
C   Velocidad de crecimiento parabolico de fisuras
C   (ecuación 8 capítulo 3)
C
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  COMMON /PARMAT/T1,KIC,RN,T4,SN0,T6,T7,CRVEL,FISMAX
  REAL*8 KIC
  IF ( R .LT.RW) THEN
    IF ( R .GT.RC ) THEN
      W = A*R - B*SQRT(R)
    ELSE
      W = 0.
    ENDIF
  ELSE
    W = CRVEL
  ENDIF
  RETURN
END

```

```

C
  FUNCTION W(R,RC,RW,A,B)
C
C   Velocidad de crecimiento lineal de fisuras
C   (ecuación 10 capítulo 3)
C
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  COMMON /PARMAT/T1,KIC,RN,T4,SN0,T6,T7,CRVEL,FISMAX,EX
  REAL*8 KIC
  IF ( R .LT.RW) THEN
    IF ( R .GT.RC ) THEN
      W = A*R - B
    ELSE
      W = 0.
    ENDIF
  ELSE
    W = CRVEL
  ENDIF
  RETURN
END

```

C  
□

### 6.3 Evaluación de la función densidad de microfisuras.

La subrutina **HCHB** calcula los coeficientes de los polinomios de Chebyshev que aproximan la función de densidad de la población de microfisuras a partir de sus momentos. Utiliza la matriz calculada por el programa **CHEBCOEF** incluido en el apartado 5.6.

La subrutina **CHEBEV** calcular el valor de la función de densidad de fisuras para cualquier tamaño de fisura a partir de los coeficientes determinados en la subrutina **HCHB**.

```

C
      SUBROUTINE HCHB(MOM,H,N,B)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
C      Aproxima la función de densidad de fisuras, a partir de los
C      momentos reducidos, mediante polinomios de Chebyshev
C      (Ec. 51 Capítulo 3)
C
      DOUBLE PRECISION MOM(N),H(N),B(1)
      IZ = 0
      DO 300 I = 1,N
C
C      Calcula los coeficientes H(i) de los polinomios
C      de Chebyshev en (0,1) de orden i-esimo
C
      H(I) = 0.D00
      DO 300 J = 1,N
      IZ = IZ + 1
300 H(I) = H(I) + B(IZ)*MOM(J)
      RETURN
      END
C
□

      FUNCTION CHEBEV(c,m,X)
      INTEGER m
      DOUBLE PRECISION CHEBEV,c(0:m)
C
C      Calcula el valor de la función de densidad de fisuras
C      para el tamaño de fisuras R a partir de los coeficientes
C      de la aproximación mediante polinomios de Chebyshev en (0,1)
C
      INTEGER j
      DOUBLE PRECISION d,dd,sv,y,y2,X
      CHEBEV = 0.
      IF ( X.GT.1.D+00 ) RETURN
      d=0.d0
      dd=0.d0
      y= 2.d0*x-1.D00
      y2=2.d0*y
      do 11 j=m,1,-1
          sv=d
          d=y2*d-dd+c(j)
          dd=sv
11  continue
      CHEBEV=y*d-dd+c(0)
      return
      END
□

```

## 6.4 Cálculo de los momentos de los polinomios de Chebyshev

El programa **CHEGEN** aquí incluido, calcula los momentos de los polinomios de Chebyshev en el intervalo (0,1). Véase apartado 5.4 del capítulo 3.

```

PROGRAM CHEGEN
C
C  Genera matriz A(0:NMOM,0:NMOM) donde Mk = A*h (ec. 50 capítulo 3)
C
C      
$$M_k(h(x)) = \int_0^1 x^k h(x) dx$$

C
C      
$$h(X) = \sum_{i=0}^{i=nmom} h_i T_i(X)$$

C
C      Ti(X) = polinomio de Chebychev de orden i en (0,1)
C
C  Se usan, como comprobación, dos métodos de cálculo:
C
C      Relación de recurrencia incluida en el Capítulo 3 (ec.64)
C      Subrutina DQMONO de la biblioteca SLATEC
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      PARAMETER (N=20)
C      REAL*8 A(0:3*N,0:3*N)
C      REAL*8 C(0:N+2),B(0:N,0:N),D(0:N,0:N)
C      REAL*8 RI(25),RJ(25),RG(25),RH(25)
C
C      NMOM = N
C
C      B  Relación de recurrencia Capítulo 3
C
C      DO 100 J = 0,NMOM+1
C          C(J) = 1D00
C      A(0,J) = 0.D00
100  IF ( MOD(J,2).EQ.0 ) A(0,J) = -1.D00/( (J-1)*(J+1) )
C      DO 200 I = 1,NMOM
C          A(I,0) = 1.D00/(I+1)
C      DO 200 J = 1,NMOM
200  A(I,J) = ( A(I-1,J-1) + A(I-1,J+1) )/4.D00 + A(I-1,J)/2.D00
C      DO 400 I = 0,NMOM
C          F = 2**(I+1)
C      DO 400 J = 0,NMOM
C          A(I,J) = A(I,J)*F
C          A(I,J) = A(I,J)
400  B(I,J) = A(I,J)
C      WRITE(1,6001) ' JLV B'
C      DO 450 I=0,NMOM
C      450 WRITE(1,6000) (B(I,J),J=0,NMOM)
C
C      SLATEC      D
C
C      BETA = 0.D00
C      DO 460 I = 0,NMOM
C          ALFA = I
C          F = 2**(I+1)

```

```

      CALL DQMOMO(ALFA,BETA,RI,RJ,RG,RH,1)
      DO 460 J = 0,NMOM
460  D(I,J) = RI(J+1)/F
C      WRITE(1,6001) ' SLATEC D'
C      DO 470 I = 0,NMOM
C 470  WRITE(1,6000) (D(I,J),J=0,NMOM)
      OPEN (2,FILE='CHEB.DAT',FORM='UNFORMATTED')
      WRITE(2) N,D
      CLOSE (2)
      STOP
6000  FORMAT(1P30E11.3)
6001  FORMAT(/,A)
      END
C
      SUBROUTINE DQMOMO(ALFA,BETA,RI,RJ,RG,RH,INTEGR)
C      MODIFIED CHEBYSHEV MOMENTS, QUADRATURE
C***AUTHOR  PIESSENS, ROBERT, APPLIED MATH. AND PROGR. DIV. -
C            K. U. LEUVEN
C            DE DONCKER, ELISE, APPLIED MATH. AND PROGR. DIV. -
C            K. U. LEUVEN
C***PURPOSE  This routine computes modified CHEBSYSHEV moments. The K-th
C            modified CHEBYSHEV moment is defined as the integral over
C            (-1,1) of W(X)*T(K,X), where T(K,X) is the CHEBYSHEV
C            POLYNOMIAL of degree K.
C
C      PARAMETERS
C      ALFA    - Double precision
C                Parameter in the weight function W(X), ALFA.GT.(-1)
C
C      BETA    - Double precision
C                Parameter in the weight function W(X), BETA.GT.(-1)
C
C      RI      - Double precision
C                Vector of dimension 25
C                RI(K) is the integral over (-1,1) of
C                (1+X)**ALFA*T(K-1,X), K = 1, ..., 25.
C
C      RJ      - Double precision
C                Vector of dimension 25
C                RJ(K) is the integral over (-1,1) of
C                (1-X)**BETA*T(K-1,X), K = 1, ..., 25.
C
C      RG      - Double precision
C                Vector of dimension 25
C                RG(K) is the integral over (-1,1) of
C                (1+X)**ALFA*LOG((1+X)/2)*T(K-1,X), K = 1, ..., 25.
C
C      RH      - Double precision
C                Vector of dimension 25
C                RH(K) is the integral over (-1,1) of
C                (1-X)**BETA*LOG((1-X)/2)*T(K-1,X), K = 1, ..., 25.
C
C      INTEGR  - Integer
C                Input parameter indicating the modified
C                Moments to be computed
C                Integr = 1 compute RI, RJ
C                       = 2 compute RI, RJ, RG
C                       = 3 compute RI, RJ, RH
C                       = 4 compute RI, RJ, RG, RH
C
C      DOUBLE PRECISION ALFA,ALFP1,ALFP2,AN,ANM1,BETA,BETP1,BETP2,RALF,
1  RBET,RG,RH,RI,RJ
      INTEGER I,IM1,INTEGR
C
      DIMENSION RG(25),RH(25),RI(25),RJ(25)

```

```

C
C
C***FIRST EXECUTABLE STATEMENT  DQMOMO
      ALFP1 = ALFA+0.1D+01
      BETP1 = BETA+0.1D+01
      ALFP2 = ALFA+0.2D+01
      BETP2 = BETA+0.2D+01
      RALF = 0.2D+01**ALFP1
      RBET = 0.2D+01**BETP1

C
C      COMPUTE RI, RJ USING A FORWARD RECURRENCE RELATION.
C
      RI(1) = RALF/ALFP1
      RJ(1) = RBET/BETP1
      RI(2) = RI(1)*ALFA/ALFP2
      RJ(2) = RJ(1)*BETA/BETP2
      AN = 0.2D+01
      ANM1 = 0.1D+01
      DO 20 I=3,25
        RI(I) = -(RALF+AN*(AN-ALFP2)*RI(I-1))/(ANM1*(AN+ALFP1))
        RJ(I) = -(RBET+AN*(AN-BETP2)*RJ(I-1))/(ANM1*(AN+BETP1))
        ANM1 = AN
        AN = AN+0.1D+01
20  CONTINUE
      IF(INTEGR.EQ.1) GO TO 70
      IF(INTEGR.EQ.3) GO TO 40

C
C      COMPUTE RG USING A FORWARD RECURRENCE RELATION.
C
      RG(1) = -RI(1)/ALFP1
      RG(2) = -(RALF+RALF)/(ALFP2*ALFP2)-RG(1)
      AN = 0.2D+01
      ANM1 = 0.1D+01
      IM1 = 2
      DO 30 I=3,25
        RG(I) = -(AN*(AN-ALFP2)*RG(IM1)-AN*RI(IM1)+ANM1*RI(I))/
1    (ANM1*(AN+ALFP1))
        ANM1 = AN
        AN = AN+0.1D+01
        IM1 = I
30  CONTINUE
      IF(INTEGR.EQ.2) GO TO 70

C
C      COMPUTE RH USING A FORWARD RECURRENCE RELATION.
C
40  RH(1) = -RJ(1)/BETP1
      RH(2) = -(RBET+RBET)/(BETP2*BETP2)-RH(1)
      AN = 0.2D+01
      ANM1 = 0.1D+01
      IM1 = 2
      DO 50 I=3,25
        RH(I) = -(AN*(AN-BETP2)*RH(IM1)-AN*RJ(IM1)+
1    ANM1*RJ(I))/(ANM1*(AN+BETP1))
        ANM1 = AN
        AN = AN+0.1D+01
        IM1 = I
50  CONTINUE
      DO 60 I=2,25,2
        RH(I) = -RH(I)
60  CONTINUE
      DO 80 I=2,25,2
        RJ(I) = -RJ(I)
80  CONTINUE
90  RETURN
      END

```

□



### 6.5 Cálculo de los coeficientes de los polinomios de Chebyshev.

El programa **CHEBCOEF** aquí incluido calcula, a partir de los momentos de los polinomios de Chebyshev generados por el programa **CHEGEN**, una matriz que multiplicada por los momentos reducidos de una función densidad de distribución nos da los coeficientes que aproximan dicha función mediante polinomios de Chebyshev. La aproximación se realiza para funciones de densidad representadas por momentos de tercer orden (mínimo necesario para el estudio de la evolución de las microfisuras) hasta funciones representadas por 20 momentos.

Se incluyen tres casos de comprobación. Véanse comentarios al principio del programa.

```

PROGRAM CHEBCOEF
C
C   A partir de los momentos de los polinomios de Chebyshev calculados
C   con CHEGEN en fichero CHEB.DAT, calcula matrices inversas para
C   Momentos 3 a 20 y las almacena en COEF
C
C   Comprueba metodo para tres casos:
C       Distribucion uniforme  h(r) = 1
C       Distribucion triangular
C           y = x/f             si x pertenece a (0,f)
C           y = (1-x)/(1-f)     si x pertenece a (f,1)
C       Polinomio de Chebyshev de orden 4
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
PARAMETER (N=20)
REAL*8 D(0:N,0:N)
REAL*8 DINV(0:N,0:N),C(0:N+2)
REAL*8 COEF(3300)
REAL*8 MOM(0:N),H(0:N)
T4(X) = 128.D00*X**4-256.D00*X**3+160.D00*X**2-32.D00*X+1.D00
1   + 1
IZ = 0
DO 300 J = 1,N
300 C(J) = 1D00
OPEN (2,FILE='CHEB.DAT',FORM='UNFORMATTED')
READ(2) NN,D
CLOSE (2)
C
C   Invierte Numerical Recipes (DINV)
C
DO 600 NMOM = 3,N
DO 490 I = 0,NMOM
DO 490 J = 0,NMOM
490 DINV(I,J) = D(I,J)
CALL DGAUSSJ(DINV,NMOM+1,N+1,C,1,1)
C
DO 500 I = 0,NMOM
DO 500 J = 0,NMOM
IZ = IZ + 1
500 COEF(IZ) = DINV(I,J)
C
600 CONTINUE
OPEN (7,FILE='CHEBCOEF.DAT',FORM='UNFORMATTED')

```

```

WRITE(7) COEF
CLOSE (7)

C
C Comprueba bondad de la aproximación para diversos casos
C
OPEN (1,FILE='CHEBCOEF.out',FORM='FORMATTED')
WRITE(*,6007)
READ (*,6008) NMOM
NMOM = MAX(MIN(NMOM,N),3)
IC = NMOM*(NMOM+1)*(2*NMOM+1)/6-13

C
C DISTRIBUCION UNIFORME
C
F = 1.D00
DO 1100 K = 0,NMOM
1100 MOM(K) = F/(K+1)
WRITE(1,6001) ' MOM '
WRITE(1,6008) NMOM
WRITE(1,6009) (MOM(I),I=0,NMOM)
WRITE(1,6001) ' H uniforme '
CALL HCHEB(MOM,H,NMOM,COEF(IC))
WRITE(1,6006) (H(I),I=0,NMOM)
WRITE(1,6001) ' H(R) uniforme '
WRITE(1,6006) (R,R=0.D00,1.01D0,0.1D00)
WRITE(1,6006) (1.,R=0.D00,1.01D0,0.1D00)
WRITE(1,6006) (( chebev(H,NMOM,R,1.D00)),R=0.D00,1.01D0,0.1D00)
WRITE(1,6006) (( Aev(H,NMOM,R,1.D00)),R=0.D00,1.01D0,0.1D00)
WRITE(1,6006) (( CES(H,NMOM,R,1.D00)),R=0.D00,1.01D0,0.1D00)

C
C DISTRIBUCION T4 + T0 ENTRE (0,1)
C
F = 1.D00
DO 2100 K = 0,NMOM
2100 MOM(K) = F*((128.D00/(K+5))-(256.D00/(K+4))
1 + (160.D00/(K+3))-(32.D00/(K+2))+(1.D00/(K+1)))
2 + F/(K+1)
WRITE(1,6001) ' MOM '
WRITE(1,6008) NMOM
WRITE(1,6009) (MOM(I),I=0,NMOM)
WRITE(1,6001) ' H T4 '
CALL HCHEB(MOM,H,NMOM,COEF(IC))
WRITE(1,6006) (H(I),I=0,NMOM)
WRITE(1,6001) ' H(R) T4 '
WRITE(1,6006) (R,R=0.D00,1.01D0,0.1D00)
WRITE(1,6006) (T4(R),R=0.D00,1.01D0,0.1D00)
WRITE(1,6006) (( chebev(H,NMOM,R,1.D00)),R=0.D0,1.01D0,0.1D00)
WRITE(1,6006) (( Aev(H,NMOM,R,1.D00)),R=0.D0,1.01D0,0.1D00)
WRITE(1,6006) (( CES(H,NMOM,R,1.D00)),R=0.D0,1.01D0,0.1D00)

C
C DISTRIBUCION TRIANGULAR ENTRE (0,1)
C
C y = x/f si x pertenece a (0,f)
C y = (1-x)/(1-f) si x pertenece a (f,1)
C
F = .001D00
DO 3100 K = 0,NMOM
3100 MOM(K) = (1.D00-F** (K+1))/( (1.D00-F) * (K+1) * (K+2) )
WRITE(1,6001) ' MOM '
WRITE(1,6008) NMOM
WRITE(1,6009) (MOM(I),I=0,NMOM)
WRITE(1,6001) ' H triangular '
CALL HCHEB(MOM,H,NMOM,COEF(IC))
WRITE(1,6006) (H(I),I=0,NMOM)
WRITE(1,6001) ' H(R) triangular '
WRITE(1,6006) (R,R=0.D00,1.01D0,0.1D00)

```

```

WRITE(1,6006) (RA(R,F),R=0.D00,1.01D0,0.1D00)
WRITE(1,6006) ((chebev(H,NMOM,R,1.D0)),R=0.D0,1.01D0,0.1D0)
WRITE(1,6006) ((Aev(H,NMOM,R,1.D0)),R=0.D0,1.01D0,0.1D0)
WRITE(1,6006) ((CES(H,NMOM,R,1.D0)),R=0.D0,1.01D0,0.1D0)
STOP
6001 FORMAT(/,A)
6006 FORMAT(11F10.6)
6007 FORMAT(' NS Momentos ',\ )
6008 FORMAT(I5)
6009 FORMAT(1P11E11.3)
END
DOUBLE PRECISION FUNCTION RA(X,F)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

C
C   y = x/f           si x pertenece a (0,f)
C   y = (1-x)/(1-f)   si x pertenece a (f,1)
C
RA = X/F
IF ( X.GT.F ) RA = (1D00-X)/(1.D00-F)
RETURN
END
SUBROUTINE HCHEB(MOM,H,N,B)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

C
C   Aproxima la función de densidad de fisuras, a partir de los
C   momentos reducidos, mediante polinomios de Chebyshev
C
C
DOUBLE PRECISION MOM(0:N),H(0:N),B(1)
IZ = (N+1)*(N+1)+1
IZ = 0
DO 300 I = N,0,-1
DO 300 I = 0,N

C
C   Calcula los coeficientes H(i) de los polinomios
C   de Chebyshev en (0,1) de orden i-esimo
C
H(I) = 0.D00
DO 300 J = N,0,-1
DO 300 J = 0,N
IZ = IZ - 1
IZ = IZ + 1
300 H(I) = H(I) + B(IZ)*MOM(J)
RETURN
END
FUNCTION chebev(c,m,R,RF)
INTEGER m
DOUBLE PRECISION chebev,c(0:m),R,RF

C
C   Calcula el valor de la función de densidad de fisuras
C   para el tamaño de fisuras R a partir de los coeficientes
C   de la aproximación mediante polinomios de Chebyshev en (0,1)
C
INTEGER j
DOUBLE PRECISION d,dd,sv,y,y2,X
X = DBLE(R)/DBLE(RF)
CHEBEV = 0.
IF ( X.GT.1.D+00 ) RETURN
d=0.d0
dd=0.d0
y= 2.d0*x-1.D00
y2=2.d0*y
do 11 j=m,1,-1
sv=d
d=y2*d-dd+c(j)

```

```

        dd=sv
11    continue
        chebev=y*d-dd+c(0)
        return
    END
    DOUBLE PRECISION FUNCTION CES(C,M,R,RF)
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

C
C    Suma de Cesaro
C
        DOUBLE PRECISION C(0:M),R,RF
        DOUBLE PRECISION D(0:30)
c        CES = 0.D00
        DO 100 I = 0,M
            D(I) = C(I)*(M+1-I)
c        CES = CES + CHEBEV(C,I ,R,RF)
100    CONTINUE
C        CES = CES/(M+1)
        CES = CHEBEV(D,M ,R,RF)/(M+1)
        RETURN
    END
    DOUBLE PRECISION FUNCTION AEV(C,M,R,RF)
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

C
C    Aceleracion de la convergencia mediante formula de Aitken
C
        DOUBLE PRECISION C(0:M),R,RF
        DOUBLE PRECISION SN1,SN2,A
        AEV = CHEBEV(C,M ,R,RF)
        SN1 = CHEBEV(C,M-1,R,RF)
        SN2 = CHEBEV(C,M-2,R,RF)
        A = AEV - 2.D00*SN1 + SN2
        IF ( ABS(A) .LT. 1.D-20 ) RETURN
        AEV = AEV - (AEV - SN1)**2/A
        RETURN
    END
$INCLUDE:'DGAUSSJ.FOR'
□

```

## **8. BIBLIOGRAFÍA**

## **8. BIBLIOGRAFÍA**

- [1] ABAQUS. USA : Hibbitt, Karlsson and Sorensen.
- [2] ABRAHAM, RALPH ; MARSDEN, JERROLD E. ; TUDORS, RATIU (1988). *Manifolds, tensor analysis and applications*. Second Edition. New York : Sringer-Verlag.
- [3] ABRAHAM, RALPH ; MARSDEN, JERROLD E. (1978). *Foundations of Mechanics*. 2nd ed. Massachusetts : Benjamin Cummings.
- [4] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions*. Washington : National Bureau of Standards.
- [5] ADINA- A Finite Element Program for Automatic Dynamic Incremental nonlinear analysis. BATHE, J. K. Report 82448-1, Acoustics and Vibration Lab., Dept. Mech. Eng., M.I.T. (September 1975, rev. December 1978).
- [6] AHEIZER, N. I. ; KREIN, M. (1962). *Some questions in the Theory of Moments*. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society.
- [7] ANSYS *Theoretical Manual*. USA : Swanson Analysis Systems.
- [8] APOSTOL, TOM M. (1989). *Calculus*, vol. II. 2ª ed. Madrid : Reverté.
- [9] BATAILLE, J. ; KESTIN, J. (1979). Irreversible Processes and Physical Interpretation of Rational Thermodynamics. *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, vol. 4, nº 4, págs. 229-258.
- [10] BATHE, K. J. (1985). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. New Jersey : Prentice Hall.
- [11] BEREMIN, F. M. (1983). A Local Criterion for Cleavage Fracture of a Nuclear Pressure Vessel Steel. *Metallurgical Transactions A*, vol 14A, págs. 2277-2287.
- [12] BERRY, J. P. (1960). Some kinetic considerations of the Griffith criterion for fracture. I. Equations of motion at constant force. *Journal of the Mechanics and Physics Solids*, nº 8, págs. 194-206.
- [13] BERRY, J. P. (1960). Some kinetic considerations of the Griffith criterion for fracture. II. Equations of motion at constant displacement. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, nº 8, págs. 207-216.
- [14] BERTHAUD, Y. ; PIJAUDIER-CABOT, G. Non-local Continuum and Micromechanics of Damage in Quasi-Brittle Materials.
- [15] BILEK, ZDENEK (1987). Dynamic Fracture Studies Overview. *Anales de Mecánica de la Fractura*. Comunicación presentada en el cuarto encuentro del Grupo español de Fractura, Braga (Portugal), 23-24 de Abril de 1987.
- [16] BISHOP, R.L. ; GOLDBERG, S. I. (1980). *Tensor Analysis on Manifolds*. New York : Dover Publications Company.
- [17] BRAND, H. R. *DIGLIB (Device Independent Graphics LIBrary)*. Livermore : Lawrence Livermore National Laboratory.
- [18] BRAR, N. S. ; BLESS, S. J. ; ROSENBERG, Z. New Experimental

- Techniques to Study Damage Evolution in Brittle Materials.
- [19] BRIGNOLI, M. ; SARTORI, L. (1993). Incremental Constitutive Relations for the Study of Wellbore Failure. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 1319-1322.
  - [20] BROEK, DAVID (1989). *The Practical Use of Fracture Mechanics*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
  - [21] BUCK, BRIAN ; MACAULAY, VINCENT A. (1991). *Maximum Entropy in Action : A Collection of Expository Essays*. Oxford : Clarendon Press.
  - [22] BUDIANSKY, B. ; O'CONNELL, R. J. (1976). Elastic Modeling of a Cracked Solid. *Int. J. Sol. Struct.*, vol 12, págs. 81-97.
  - [23] CASIMIR, H. (1945). On Onsager's principle of microscopic reversibility. *Rev. Mod. Phys.*, nº 17, págs. 343-350.
  - [24] COLEMAN, B. D. ; GURTIN, M. E. (1967). Thermodynamics with Internal State Variables. *The Journal of Chemical Physics*, vol 47, nº 3, págs. 597-613.
  - [25] COSMOS. Santa Monica : Structural Research and Analysis Corporation.
  - [26] COSTIN, L. S. ; DUFFY, J. ; FREUND, L. B. (1977). Fracture initiation in metals under stress wave loading conditions. En, *Fast fracture and Crack Arrest*. Special Technical Publication 627. Philadelphia : American Society for Testing and Materials, págs. 301-318.
  - [27] COWIN, C. (1985). The Relationship Between the Elasticity Tensor and the Fabric Tensor. *Mechanics of Materials*, nº 4, págs. 137-147.
  - [28] CURRAN, D. R.; SEAMAN, L.; SHOCKEY, D. A. (1987). Dynamic Failure of Solids. *Physics Reports*, vol. 147, nº 5-6, págs. 253-388.
  - [29] CHABOCHE, J. L. (1986). Continuum Damage Mechanics : Present State and Future Trends. Séminaire International sur l'Approche Locale de la Rupture. Documents de conférence. Moret-sur-Loing (France) : Centre de Recherches EDF " Les Renardières".
  - [30] CHENG, H. ; DUSSEAU, M. B. (1993). Deformation and Diffusion Behaviour in a Solid Experiencing Damage : a Continuous Damage Model and Its Numerical Implementation. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 1323-1331.
  - [31] CHEREPANOV, G. P. (1979). *Mechanics of Brittle Fracture*. New York : McGraw-Hill.
  - [32] CHUDNOVSKY, A. ; DOLGOPOLSKY, A. ; KACHANOV, M. (1987). Elastic Interaction of a Crack a Microcrack Array. I. Formulation of the problem and general form of the solution. *Int. J. Solids Structures*, vol. 23 nº 1, págs. 1-10.
  - [33] DAFALIAS, Y. F. (1983). Corotational Rates for Kinematic Hardening at Large Plastic Deformations. *Journal of Applied Mechanics*, vol 50, págs. 561-565.
  - [34] DAVISON, L.; GRAHAN, R. A. (1979). *Shock Compression of Solids*.



- Physics Reports* , vol. 55, pág. 255-379.
- [35] DOWSON, D. C. ; WRAGG, A. (1973). Maximum-Entropy Distributions Having Prescribed First and Second Moments. *IEEE Transactions on Information Theory*, págs. 689-693.
  - [36] DULANEY, E. N. ; BRACE, W. F. (1960). Velocity behavior of a growing crack. *Journal of Applied Physics*, nº 31, págs. 2233-2236.
  - [37] DYSKIN, A. V. ; GERMANOVICH, L. N. (1993). A Model of Crack Growth in Microcracked Rock. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 813-820.
  - [38] ENGLEMAN, L. B. (1991). *NIKE-2D, a Nonlinear, Implicit, Two-Dimensional Finite Element Code for Solid Mechanics. User Manual*. Lawrence Livermore National Library, Rept. UCLR-MA-105413.
  - [39] FLANAGAN, D. P. ; TAYLOR, L. M. (1987). An Accurate Numerical Algorithm for Stress Integration with Finite rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, nº 62, págs. 305-320.
  - [40] FOURNEY, W. L. ; ET. AL. Fragmentation Studies in Jointed Brittle Material. Maryland : University of Maryland.
  - [41] FREUND, L. B. (1990). *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge : Cambridge University Press.
  - [42] FUNG, Y. C. (1965). *Foundations of Solid Mechanics*. ENGLEWOOD CLIFFS : PRENTICE-HALL.
  - [43] GERMAIN, P. (1973). *Cours de Mécanique des Milieux Continus. Tome I : Théorie Générale*. Paris : Masson et Cie Editeurs.
  - [44] GERMAIN, P. ; MULLER P. (1980). *Introduction a la mécanique des milieux continus*. Paris : Masson.
  - [45] GERMAIN, P. ; NGUYEN; Q. S. ; SUQUET, P. (1983). Continuum Thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, págs. 1010-1020.
  - [46] GOODMAN, J. (1985). Structural Fragility and Principle of Maximun Entropy. *Structural Safety*, nº 3, págs. 37-46.
  - [47] GOODS, S. H. ; BROWN, L. M. (1979). *Acta Metall.* , nº 27, pág. 1.
  - [48] GRADY, D. E. (1984). The Mechanics of Fracture under High-rate Stress Loading. *Proc. William Prager Symp. Mech. Geomaterials : Rocks, Concrete, Soils, Int. Union Theoretical and Applied Mechanics*, Northwestern University, Evanston, Il., 11-18 septiembre 1984.
  - [49] GRADY, D. E. ; KIPP, M. E. (1979). The Micromechanics of Impact Fracture of Rock. *Int. J. Rock Mech. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 16, págs. 293-302.
  - [50] GRADY, D. E. ; KIPP, M. E. (1980). Continuum Modelling of Explosive Fracture in Oil Shale. *Int. J. Rock Mech. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol 17, págs. 147-157.
  - [51] GRADY, D. E. ; KIPP, M. E. Dynamic Rock Fragmentation, en : *Fracture*

- Mechanics of Rock*. London : Academic Press.
- [52] GRADY, D. E.; KIPP, M. E. (1985). Geometric Statistics and Dynamic Fragmentation. *Journal of Applied Physics*, nº 58, págs. 1210-1222.
  - [53] GRADY, DENNIS E. Fragmentation Under Impulsive Stress Loading. Albuquerque : Sandia National Laboratories.
  - [54] GREEN, A. E. ; NAGHDI, P. M. (1965). A general theory of an elastic-plastic continuum. *Arch. Rational Mech. Anal.*, nº 18, págs. 251-281.
  - [55] GRIFFITH, A. A. (1920). The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society (London)*, nº 221, págs. 163-198.
  - [56] HALLQUIST, JOHN O. (1983). *Theoretical Manual for DYNA3D*. Livermore : Lawrence Livermore Laboratory, Rept. UCID-19401.
  - [57] HALLQUIST, JOHN O. (1988). *User's Manual For DYNA2D -- An Explicit Two-dimensional Hydrodynamic Finite Element Code with Interactive Rezoning and Graphical Display*. Livermore : Lawrence Livermore National Laboratory, Rept. UCID-18756, Rev. 3.
  - [58] HALLQUIST, JOHN O. ; Whirley, Robert G. (1989). *DYNA3D User's Manual : Nonlinear Dynamic Analysis of Structures in Three Dimensions*. Livermore : Lawrence Livermore National Laboratory, Rept. UCID-19592, Rev. 5.
  - [59] HAUSDORFF , F. (1923). Momentprobleme für ein endliches Intervall. *Mathematische Zeitschrift*, nº 9, págs. 220-248.
  - [60] HORI, M.; NEMAT-NASSER, S. (1983). Overall Moduli of Solids with Microcracks. *J. Mech. Phys.Solids*, vol 31, págs. 155-171.
  - [61] HORI, M.; NEMAT-NASSER, S. (1988). Dynamic response of crystalline solids with microcavities. *Journal of Applied Physics*, nº 64, págs. 856-863.
  - [62] IRWIN, G. R. (1948). Fracture dynamics. *Fracturing of Metals*. Cleveland : American Society of Metals, págs. 147-166.
  - [63] JAUMANN, G. (1911). Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien*, nº 120, págs. 385-530.
  - [64] JAYNES, E. T. (1983). *Papers on Probability Statistics and Statistical Physics*. Edited by R. D. Rosenkrantz. Dordrecht (Holland) : D. Reidel Publishing Company.
  - [65] KACHANOV , MARK ; LAURES, J. P (1989). Three-dimensional problem of strongly interacting arbitrarily located penny-shaped cracks. *International Journal of Fracture*, vol. 41, pGA. 289-313.
  - [66] KACHANOV, M. (1987). Elastic Solids with many cracks : a simple method of analysis. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 23, nº 1, págs. 23-43.
  - [67] KACHANOV, M. (1987). On Modelling of Anisotropic Damage in Elastic Brittle Materials. A brief Review. *ASME Winter Meeting*. Boston.

- [68] KACHANOV, MARK (1980). Continuum Model of Medium with Cracks. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 106, N° EM5, págs. 1039-1051.
- [69] KAPUR, J. N. ; KESAVAN, H. K. (1992). *Entropy Optimization Principles with Applications*. Boston : Academic Press.
- [70] KIPP, M. E. ; GRADY, D. E. (1978). *Numerical Studies of Rock Fragmentation*. SAND79-1582. Albuquerque, NM : Sandia National Laboratories.
- [71] KOLMOGÓROV, A. N. ; FOMÍN, S. V. (1975). *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. Segunda edición. Moscú : Editorial Mir.
- [72] KORN, GRANINO A. ; KORN, THERESA M. (1961). *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers : Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. Second enlarged and revised edition. New York : McGHraw-Hill.
- [73] KOTOUL, M. ; BÍLEK, Z. (1988). On modelling of stress wave / fracture interaction in brittle bodies subjected to dynamic fracture. *International Journal of Fracture*, n° 41, págs. 207-221.
- [74] KRAUSZ, A. S. ; EYRING, H. (1975). *Deformation Kinetics*. New York : John Wiley and Sons.
- [75] KRIZEK, M. (1990). *Finite element approximation of variational problems and applications*. Essex : Longman Scientific and Technical.
- [76] KULATILAKE, S. W. ; WANG, S. ; STEPHANSSON, O. (1993). Effect of Finite Size Joints on the Deformability of Jointed Rock in Three Dimensions. *J. Rock Mech. Sci. & Geomech. Abstracts*, vol. 30, n° 5, págs. 479-501.
- [77] KUSZMAU, JOEL S. A New Constitutive Model for Fragmentation of Rock under Dynamic Loading. Albuquerque : Sandia National Laboratories. I
- [78] LAM, P. S. ; FREUND, L. B. (1985). Analysis of dynamic growth of a tensile crack in an elastic-plastic material. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 33, n° 2, págs. 153-167.
- [79] LIU, ZHONG ; MYER, LARRY R. ; COOK, NEVILLE G. W. (1993). Micromechanics of Granular Materials : Numerical Simulation of the Effects of Heterogeneities. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, n° 7, págs. 1281-1284.
- [80] MAKER, BRADLEY N. ; HALLQUIST, JOHN O. (1990). *NIKE3D : A Nonlinear, Implicit, Three-Dimensional Finite Element Code for Solid and Structural Mechanics User's Manual*. Livermore : Lawrence Livermore National Laboratory. UCRL-MA-105268.
- [81] MALVERN, L. E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium*. New Jersey : Prentice Hall.
- [82] MANDEL, J. (1973). Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques. *J. Solids Structures*, vol 9, págs. 725-740.
- [83] MARSDEN, JERROLD E. ; HUGHES, THOMAS J. (1983). *Mathematical*

- Foundations of Elasticity*. New Jersey : Prentice Hall.
- [84] MAUGIN, G. A. (1990). Internal Variables and Dissipative Structures. *J. Non-Equilib. Thermodyn*, vol. 15, nº 2, págs. 173-192.
  - [85] MAUGIN, GERARD A. (1992). *The thermomechanics of plasticity and fracture*. Cambridge : Cambridge University Press.
  - [86] MOTT , N. F.(1948). Brittle fracture in mild steel plates. *Engineering*, nº 165, págs. 16-18.
  - [87] MUDRY, F. y otros (1992). Development of Local Criteria in Steels. AMD, vol 137, *Advances in Fracture / Damage Models for the Analysis of Engineering Problems*, ASME, Págs. 305-318.
  - [88] MUKHERJEE, D. ; HURST, D. C. (1984). Maximum Entropy Revisited. *Statistica Neerlandica* 38, nº 1, págs. 1-12.
  - [89] MURA, T. (1987). *Micromechanics of defects in solids*. Dordrecht : Martinus Nijhoff Publications.
  - [90] NAGHDI, P. M. (1990). A critical Review of the State of Finite Plasticity. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, nº 41, págs. 315-394.
  - [91] NASTRAN : *User's Manual*. Los Angeles : The Mac-Neal-Schwendler Corporation.
  - [92] NEMAT-NASSER, S. (1982). On Finite Deformation Elasto-Plasticity. *Int. J. Solids Structures*, vol. 18, nº 10, págs. 857-872.
  - [93] NOLL, W. (1955). On the Continuity of the Solid and Fluids States. *J. Rat. Mech. Anal*, vol. 4, págs. 1955.
  - [94] ODEN, J. T. (1972). *Finite Elements of Nonlinear Continua*. New York : McGraw-Hill.
  - [95] ODEN, J. T. (1976). *An Introduction to Mathematical Theory of Finite Elements*. USA : John Wiley and Sons.
  - [96] ODEN, J. T. (1983). *Variational Methods in Theoretical Mechanics*. Berlin : Springer-Verlag.
  - [97] ONSAGER, L. ; MACHLUP, S. (1953). Fluctuations and irreversible processes. *Phys. Rev.*, nº 91, págs. 1505-1515.
  - [98] OWEN, D. J. R. ; HINTON, E. (1980). *Finite Elements in Plasticity : Theory and Practice*. Swansea : Pineridge Press.
  - [99] PARTON ,V. Z.; BORISOVSKY, V. G. (1989). *Dynamic Fracture Mechanics. Volume 1 : Stationary Cracks*. Revised Edition. New York : Hemisphere Publishing Corporation.
  - [100] PARTON, V. Z.; MOROZOV, E.M. (1989). *Mechanics of Elastic-Plastic Fracture*. Second Edition, Revised. Washington : Hemisphere Publishing Corporation.
  - [101] PERL, M. ; SHMUELY, M. ; BETSER, A. A. (1980). On the Dynamic Propagation of a Griffith Crack in a Finite Rectangular Plate. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 14, págs. 143-153.

- [102] PINSKY, PETER M.; ORTIZ, MIGUEL ; PISTER, KARL S. (1983). Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, nº 40, págs. 137-158.
- [103] PRESS, WILLIAM H., ET. AL. (1992). *Numerical Recipes in Fortran : The Art of Scientific Computing*. Second Edition. Cambridge : Cambridge University Press.
- [104] PRIGOGINE, I. (1974). *Introducción a la termodinámica de los procesos irreversibles*. 1ª ed. española. Madrid : Selecciones Científicas.
- [105] RAVI-CHANDAR, K. ; KNAUSS, W. G. (1984). An experimental investigation into dynamic fracture : I. Crack Initiation and arrest. *International Journal of Fracture*, nº 25, págs. 247-262.
- [106] RAVI-CHANDAR, K. ; KNAUSS, W. G. (1984). An experimental investigation into dynamic fracture : II. Microstructural aspects. *International Journal of Fracture*, nº 26, págs. 65-80.
- [107] RAVI-CHANDAR, K. ; KNAUSS, W. G. (1984). An experimental investigation into dynamic fracture : III. On steady state crack propagation and crack branching. *International Journal of Fracture*, nº 26, págs. 141-154.
- [108] RAVI-CHANDAR, K. ; KNAUSS, W. G. (1984). An experimental investigation into dynamic fracture : IV. On the interaction of stress waves with propagating cracks. *International Journal of Fracture*, nº 26, págs. 189-200.
- [109] RAVICHANDRAN, G. ; CLIFTON, R. J. (1989). Dynamic fracture under plane wave loading. *International Journal of Fracture*, nº 40, págs. 157-201.
- [110] RÍOS, SIXTO (1973). *Métodos estadísticos*. Sexta edición. Madrid : Ediciones del Castillo.
- [111] ROSAKIS, ARES J. ; ZEHNDER, ALAN T. (1985). On the dynamic fracture of structural metals. *International Journal of Fracture*, nº 27, págs. 169-186.
- [112] RUDIN, WALTER (1985). *Análisis real y complejo*. Madrid : Alhambra.
- [113] RUDIN, WALTER (1990). *Principios de Análisis Matemáticos*. España : McGraw-Hill.
- [114] SCHOUTEN, J. A. ; KULK, W. (1969). *Pfaff's Problem and its Generalizations*. Reprint. New York : Chelsea Publishing Company.
- [115] SEAMAN, L. ; CURRAN, D. R. ; SHOCKEY, D. A. (1976). Computational models for ductile and brittle fracture. *Journal of Applied Physics*, nº 47, págs. 4814-4826.
- [116] SEAMAN, L. ; CURRAN, D. R. ; CREWDSON, R. C. (1978). Transformation of observed crack traces on a section to true crack density for fracture calculations. *J. Appl. Phys.*, vol. 49, nº 10, págs. 5221-5229.
- [117] SHANNON, C. (1948). *Bell System Tech. J.* nº 27. Reimpreso en Shannon C. ; Weaver, W. (1949). *The Mathematical Theory of Communication*. Urbana : University of Illinois Press.

- [118] SHEN, B. ; STEPHANSSON, O. (1993). Numerical Analysis of Mixed Mode I and Mode II Fracture Propagation. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 861-867.
- [119] SHOHAT, J. A. ; TAMARKIN, J. D. (1943). *The Problem of Moments*. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society.
- [120] SHUKLA, A.; AGARWAL, R. K. ; NIGAM, H. (1988). Dynamic fracture studies on 7075-T6 aluminum and 4340 steel using strain gages and photoelastic coatings. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 31, nº 3, págs. 501-515.
- [121] SIH, G. C.; LIEBOWITZ, H. (1968). Fracture. An Advanced Treatise, vol. II. *Mathematical Theories of Brittle Fracture*. New York : Academic Press.
- [122] SIMO, J. C. (1988). A Framework for Finite Strain Elastoplasticity Based on Maximum Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition : Part I. Continuum Formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, nº 66, págs. 199-219.
- [123] SIMO, J. C. ; JU, J. W. (1987). Strain and Stress-Based Continuum Damage Models : I. Formulation. *Int. J. Solid Structures*, vol. 23, nº 7, págs. 821-840.
- [124] SIMO, J. C. ; ORTIZ, M. (1985). A Unified Approach to Finite Deformation Elastoplastic Analysis Based on the Use of Hyperelastic Constitutive Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, nº 49, págs. 221-245.
- [125] SIMO, J. C. ; PISTER, K. S. (1984). Remarks on Rate Constitutive Equations for Finite Deformation Problems : Computational Implications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, nº 46, págs. 201-215.
- [126] SNEDDON, I. N. (1961). *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*. London : Oliver and Boyd.
- [127] SNEDDON, I. N.; LOWENGRUB, M. (1969). *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*. New York : John Wiley & Sons.
- [128] SOKOLNIKOFF, S. (1979). *Análisis tensorial : Teoría y aplicaciones a la Geometría y Mecánica de los Medios Contínuos*. 2ª edición. Madrid : Editorial Index.
- [129] SOLANA, VICENTE ; ARTEAGA, ANGEL (1987). Second Order Uncertainty Modelling Over Finite and Infinite Domains using Entropy. University of Waterloo, Canada : Institute for Risk Research.
- [130] TAYLOR, LEE M. ; CHEN, ER-PING ; KUSZMAUL, JOEL S. (1986). Microcrack-induced damage accumulation in brittle rock under dynamic loading. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, nº 55, págs. 301-320.
- [131] TRUESDELL, C. (1955). The simplest rate theory of pure elasticity. *Comm. Pure Appl. Math.*, nº 8, págs. 123-132.
- [132] TRUESDELL, C. (1969). *Rational Thermodynamics*. New York : McGraw-Hill.

- [133] TRUESDELL, C. (1973). *Termodinámica racional : Cursos de conferencias acerca de temas seleccionados*. Barcelona : Editorial Reverté.
- [134] TULER, F. R.; BUTCHER, B. M. (1968). A criterion for the time dependence of dynamic fracture. *International Journal of Fracture*, nº 4, págs 431-437.
- [135] VON MISES, RICHARD (1964). *Mathematical Theory of Probability and Statistics*. New York : Academic Press.
- [136] VOROBYEV, YU V. (1965). *Method of Moments in Applied Mathematics*. New York : Gordon and Breach Science Publishers.
- [137] WANG, R. ; KEMENY, J. M. (1993). Micromechanical Modeling of Tuffaceous Rock for Application in Nuclear Waste Storage. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 1351-1357.
- [138] WILKINS, M.L. (1977). *Fracture Studies with Two and Three Dimensional Computer Simulation Programs*. Livermore : Lawrence Livermore National Laboratory.
- [139] YONGHONG ZHAO ; JIEFAN HUANG ; REN WANG (1993). Fractal Characteristics of Mesofractures in Compressed Rock Specimens. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 877-882.
- [140] YUAN, Y. G. ; LAJTAI, E. Z. ; AYARI, M. L. (1993). Fracture Nucleation from a Compression-parallel, Finite-width Elliptical Flaw. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 873-876.
- [141] ZEHNDER, ALAN T. ; ROSAKIS, ARES J. (1990). Dynamic fracture initiation and propagation in 4340 steel under impact loading. *International Journal of Fracture*, nº 43, págs. 271-285.
- [142] ZIENKIEWICZ, O. C. (1980). *El método de los elementos finitos*. Barcelona : Editorial Reverté.

## **7. APÉNDICE 2.**

### **CÁLCULO DE LA MATRIZ [A]**



En este Apéndice deducimos una expresión para el cálculo de la matriz constante [A] del sistema de ecuaciones diferenciales de la evolución por convección de una población de microfisuras.

Esta expresión se ha incluido en el programa de ordenador **GEN**, incluido en el siguiente Apéndice, para su evaluación numérica

Los elementos de esta matriz, de seis índices, vienen dados por la expresión,

$$A_{i,j,m,k,n,l} = D_{i,j,m,k,n,l} - 3 B_{i,j,m,k,n,l} \quad (1)$$

$(i, j = 1, 3; m, n = 0, 1, 2, \dots; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2m; l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2n)$

donde, (véase ecuación (15) del capítulo 4), las matrices [B] y [D] representan las integrales,

$$D_{i,j,m,k,n,l} = \int_{S_n} n_i q_{2n,l} \frac{\partial q_{2m,k}}{\partial n_j} dS_n \quad (2)$$

$$B_{i,j,m,k,n,l} = \int_{S_n} \frac{n_i n_j}{\|\vec{n}\|^2} q_{2n,l} q_{2m,k} dS_n \quad (3)$$

siendo  $q_{2m,k}$  las funciones armónicas esféricas,

$$q_{2m,k}(\varphi, \psi) = \alpha_{m,k} \begin{cases} \cos k\varphi \\ 1 \\ \sin k\varphi \end{cases} P_{2m}^{|k|}(\cos \psi) \quad \begin{cases} (k > 0) \\ (k = 0) \\ (k < 0) \end{cases} \quad (4)$$

$(\varphi \in [0, 2\pi]; \psi \in [0, \pi]; m = 0, 1, 2, 3, \dots; k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm 2m)$

con,

$$\alpha_{m,k} = \sqrt{\frac{(4m+1)(2m-|k|)!}{2\pi(1+\delta_{k,0})(2m+|k|)!}} \quad (5)$$

y donde  $P_m^k$  son las funciones asociadas de Legendre de primera especie de grado  $m$  y orden  $k$  (véase apartado 4.3 del capítulo 4)

Con el fin de no recargar la notación en sucesivas ecuaciones, no incluiremos el rango de variación de los subíndices. Se entenderá que son los mismos que los especificados en (1) y (4)

Derivando  $q_{2m,k}(\varphi, \psi)$  en (4) respecto a las componentes  $n_i$  de la normal al plano de las microfisuras obtenemos,

$$\frac{\partial q_{2m,k}}{\partial n_i} = \frac{\partial q_{2m,k}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \frac{\partial q_{2m,k}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial n_i} \quad (6)$$

Desarrollando cada uno de los términos de la anterior ecuación tenemos,

$$\frac{\partial q_{2m,k}}{\partial \varphi} = k\alpha_{m,k} \begin{Bmatrix} -\sin k\varphi \\ 0 \\ \cos k\varphi \end{Bmatrix} P_{2m}^{(|k|)}(\cos \psi) \quad (7)$$

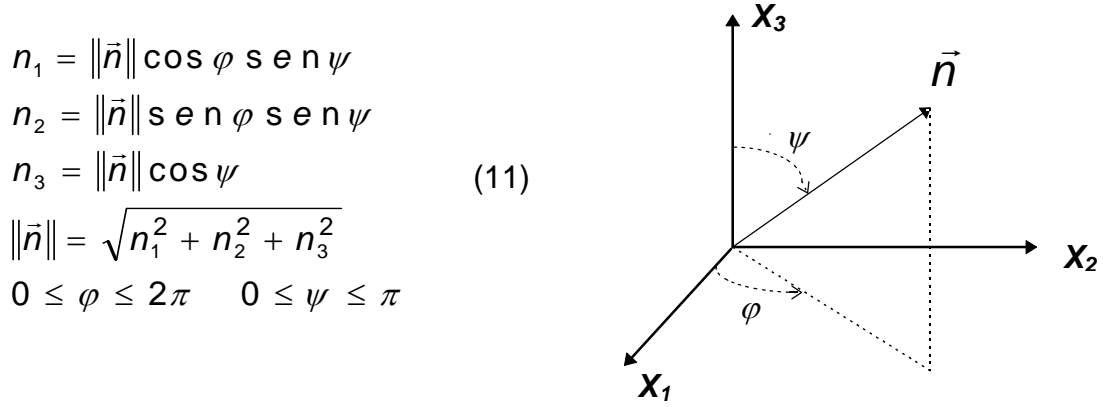
$$\frac{\partial q_{2m,k}}{\partial \psi} = -\alpha_{m,k} \begin{Bmatrix} \cos k\varphi \\ 1 \\ \sin k\varphi \end{Bmatrix} \sin \psi \frac{dP_{2m}^{(|k|)}(t)}{dt} \quad t = \cos \psi \quad (8)$$

Sustituyendo la relación (véase, por ejemplo, Korn y Korn (1968) pág. 870),

$$(t^2 - 1) \frac{dP_m^k(t)}{dt} = (m - k + 1) P_{m+1}^k(t) - (m + k) t P_m^k(t) \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (9)$$

en (8) obtenemos,

$$\frac{\partial q_{2m,k}}{\partial \psi} = \alpha_{m,k} \begin{Bmatrix} \cos k\varphi \\ 1 \\ \sin k\varphi \end{Bmatrix} \left[ \frac{((2m - |k| + 1) P_{2m+1}^{(|k|)}(\cos \psi) - (2m + |k|) \cos \psi P_{2m}^{(|k|)}(\cos \psi))}{\sin \psi} \right] \quad (10)$$



**Figura 7-1** Coordenadas esféricas

Para calcular las derivadas de  $\varphi$  y  $\psi$  respecto a  $\vec{n}$  nos es útil expresar sus componentes mediante la siguiente ecuación (véase Figura 7-1),

$$n_i = \|\vec{n}\| (\delta_{i,1} \cos \varphi + \delta_{i,2} \operatorname{sen} \varphi + \delta_{i,3}) ((\delta_{i,1} + \delta_{i,2}) \operatorname{sen} \psi + \delta_{i,3} \cos \psi) \tag{12}$$

donde  $\delta_{i,j}$  es la delta de Kronecker.

Si derivamos la relación  $\tan \varphi = \frac{n_2}{n_1}$  respecto  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$  tenemos que,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} = -\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\|\vec{n}\| \operatorname{sen} \psi}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} = \frac{\cos \varphi}{\|\vec{n}\| \operatorname{sen} \psi}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n_3} = 0 \tag{13}$$

lo cual se puede expresar con una notación más compacta,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = \frac{1}{\|\vec{n}\| \operatorname{sen} \psi} (-\delta_{1,i} \operatorname{sen} \varphi + \delta_{2,i} \cos \varphi) \tag{14}$$

Del mismo modo derivando respecto a  $n_i$  la relación  $\cos \psi = \frac{n_3}{\|\vec{n}\|}$  obtenemos,

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_i} = -\frac{1}{\operatorname{sen} \psi} \left( \frac{\delta_{3,i}}{\|\vec{n}\|} - \frac{n_3}{\|\vec{n}\|^3} n_i \right) \tag{15}$$

Particularizando (15) para las componentes  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$  obtenemos las relaciones,

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_1} = \frac{\cos \varphi \cos \psi}{\|\vec{n}\|}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial n_2} = \frac{\sin \varphi \cos \psi}{\|\vec{n}\|}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial n_3} = -\frac{\sin \psi}{\|\vec{n}\|} \quad (16)$$

que agrupadas en una sola ecuación producto de términos en  $\varphi$  y de términos en  $\psi$  se puede expresar como,

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_i} = \frac{1}{\|\vec{n}\|} (\delta_{1,i} \cos \varphi + \delta_{2,i} \sin \varphi + \delta_{3,i}) ((\delta_{1,i} + \delta_{2,i}) \cos \psi - \delta_{3,i} \sin \psi) \quad (17)$$

Sustituyendo en (2) la ecuación (6) obtenemos,

$$D_{i,j,m,k,n,l} = D1_{i,j,m,k,n,l} + D2_{i,j,m,k,n,l} \quad (18)$$

con

$$D1_{i,j,m,k,n,l} = \int_{S_n} n_i q_{2n,l} \frac{\partial q_{2m,k}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n_j} dS_n \quad (19)$$

$$D2_{i,j,m,k,n,l} = \int_{S_n} n_i q_{2n,l} \frac{\partial q_{2m,k}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial n_j} dS_n \quad (20)$$

Si en (19) sustituimos las ecuaciones (4) (7) (12) y (14) y reemplazamos el diferencial de la esfera unidad por su valor en coordenadas esféricas,  $dS_n = \sin \psi d\psi d\varphi$  encontramos que  $D1$  se puede expresar como producto de dos integrales, una dependiente de  $\varphi$  y otra de  $\psi$ ,

$$D1_{i,j,m,k,n,l} = D1\Phi_{i,j,m,k,n,l} D1\Psi_{i,j,m,k,n,l} \quad (21)$$

siendo,

$$D1\Phi_{i,j,m,k,n,l} = k\alpha_{m,k}\alpha_{n,l} \int_0^{2\pi} (\delta_{1,i} \cos \varphi + \delta_{2,i} \sin \varphi + \delta_{3,i}) \begin{Bmatrix} \cos l\varphi \\ 1 \\ \sin l\varphi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin k\varphi \\ 0 \\ \cos k\varphi \end{Bmatrix} d\varphi \quad (22)$$

$$D1\Psi_{i,j,m,k,n,l} = \int_0^{\pi} ((\delta_{1,i} + \delta_{2,i}) \sin \psi + \delta_{3,i} \cos \psi) P_{2n}^{l|}(\cos \psi) P_{2m}^{k|}(\cos \psi) d\psi \quad (23)$$

Análogamente sustituyendo en (20) las ecuaciones (4) (10) (12) y (17)

$$D2_{i,j,m,k,n,l} = D2\Phi_{i,j,m,k,n,l} D2\Psi_{i,j,m,k,n,l} \quad (24)$$

donde

$$D2\Phi_{i,j,m,k,n,l} = \alpha_{m,k} \alpha_{n,l} \int_0^{2\pi} \left( \delta_{1,i} \cos \varphi + \delta_{2,i} \sin \varphi + \delta_{3,i} \right) \begin{Bmatrix} \cos l\varphi \\ 1 \\ \sin l\varphi \end{Bmatrix} \left( \delta_{1,j} \cos \varphi + \delta_{2,j} \sin \varphi + \delta_{3,j} \right) \begin{Bmatrix} \cos k\varphi \\ 1 \\ \sin k\varphi \end{Bmatrix} d\varphi \quad (25)$$

$$D2\Psi_{i,j,m,k,n,l} = \int_0^{\pi} \left( (\delta_{1,i} + \delta_{2,i}) \sin \psi + \delta_{3,i} \cos \psi \right) \left( (\delta_{1,j} + \delta_{2,j}) \cos \psi - \delta_{3,j} \sin \psi \right) P_{2n}^{(l)}(\cos \psi) \left( (2m - |k| + 1) P_{2m+1}^{(k)}(\cos \psi) - (2m + 1) \cos \psi P_{2m}^{(k)}(\cos \psi) \right) d\psi \quad (26)$$

Sustituyendo en (3) las ecuaciones (4) y (12) y agrupando los términos en  $\varphi$  y los términos en  $\psi$  podemos calcular los elementos de la matriz [B],

$$B_{i,j,m,k,n,l} = B\Phi_{i,j,m,k,n,l} B\Psi_{i,j,m,k,n,l} \quad (27)$$

siendo

$$B\Phi_{i,j,m,k,n,l} = \alpha_{m,k} \alpha_{n,l} \int_0^{2\pi} \left( \delta_{1,i} \cos \varphi + \delta_{2,i} \sin \varphi + \delta_{3,i} \right) \begin{Bmatrix} \cos l\varphi \\ 1 \\ \sin l\varphi \end{Bmatrix} \left( \delta_{1,j} \cos \varphi + \delta_{2,j} \sin \varphi + \delta_{3,j} \right) \begin{Bmatrix} \cos k\varphi \\ 1 \\ \sin k\varphi \end{Bmatrix} d\varphi \quad (28)$$

$$B\Psi_{i,j,m,k,n,l} = \int_0^{\pi} \left( (\delta_{1,i} + \delta_{2,i}) \sin \psi + \delta_{3,i} \cos \psi \right) P_{2n}^{(l)}(\cos \psi) \left( (\delta_{1,j} + \delta_{2,j}) \sin \psi + \delta_{3,j} \cos \psi \right) P_{2m}^{(k)}(\cos \psi) \sin \psi d\psi \quad (29)$$

Finalmente, haciendo uso de las ecuaciones anteriores, podemos calcular los elementos de la matriz [A] mediante la expresión,

$$A = D1\Phi D1\Psi + D2\Phi D2\Psi - 3 B\Phi B\Psi \quad (30)$$

que debe de entenderse entre elementos de las matrices, aunque no se halla escrito explícitamente por sencillez de notación.

## **8. APÉNDICE 3**

### **LISTADOS DE LOS PROGRAMAS DE CONVECCIÓN DE MICROFISURAS**

<b>8.1 Cálculo de los coeficientes <math>[A]</math></b>	<b>140</b>
<b>8.2 Distribución inicial de microfisuras.</b>	<b>145</b>
<b>8.3 Integración del sistema de ecuaciones diferenciales</b>	<b>148</b>
<b>8.4 Representación gráfica de resultados.</b>	<b>158</b>
<b>8.5 Rutinas auxiliares</b>	<b>160</b>

En este Apéndice, incluimos los listados de los programas descritos en el apartado 4.6 del capítulo 4.

### 8.1 Cálculo de los coeficientes [A]

El programa **GEN** aquí incluido, calcula la matriz de constantes [A] del sistema de ecuaciones diferenciales que representa la evolución de una población de microfisuras debida a convección pura.

```

C
C      Calcula numericamente los coeficientes no integrales del
C      sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente a
C      conveccion de una poblacion de fisuras
C
PROGRAM GEN
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
PARAMETER (NMAX=300)
COMMON /GAUL/A(3,3,NMAX,NMAX)
REAL      A
INTEGER I,J,F,K,G,L,ABSK,ABSL,F2,G2,KRO,NP,NPOINT,F2M1,FK,GL
INTEGER NPUN,NOES3
INTEGER FMAX,GMAX,NVAL
INTEGER KROI1,KROI2,KROI3,KROJ1,KROJ2,KROJ3,NOES3I,NOES3J
PARAMETER (NPUN=10000)
DOUBLE PRECISION XPHI(NPUN),WPHI(NPUN),XPSI(NPUN),WPSI(NPUN)
PARAMETER (PI=3.1415926535897932D0,PI2=2.D0*PI)
DIM = (INT(SQRT(8*NMAX+1))-3)/4
1 NVAL = 0
  B3M = 0.
  AAM = 0.
  DM = 0.
  BPHIM = 0.
  BPSIM = 0.
  D1PHIM = 0.
  D1PSIM = 0.
  D2PHIM = 0.
  D2PSIM = 0.
C
C      Lectura de Fmax, Gmax y num. de puntos de integracion numerica
C
  WRITE(*,6011) '          Fmax (0=Stop) = '
  READ (*,*) FMAX
  IF ( FMAX.EQ.0 ) STOP
  IF ( FMAX.GT.DIM) STOP ' Incrementar dimension matriz A'
  WRITE(*,6011) '          Gmax = '
  READ (*,*) GMAX
  IF ( GMAX.GT.DIM) STOP ' Incrementar dimension matriz A'
  WRITE(*,6011) ' Num. puntos int. Gauss = '
  READ (*,*) NPOINT
C
C      Fichero ASCII de salida de coeficientes esfericos
C
  OPEN(9,FILE='SPHCOEF.DAT',FORM='FORMATTED',STATUS='UNKNOWN')
C  OPEN(9,FILE='NUL',FORM='FORMATTED',STATUS='UNKNOWN')
  WRITE(9,7001) '          Fmax =',FMAX,
1              '          Gmax =',GMAX,
2              ' NPuntos =',NPOINT

```

```

C
C   Pesos de Gauss-Legendre para integracion en PHI entre (0,2*PI)
C
CALL GAULEG(0.D0,PI2,XPHI,WPHI,NPOINT)
C
C   Pesos de Gauss-Legendre para integracion en PSI entre (0,PI/2)
C
CALL GAULEG(0.D0,PI/2.D0,XPSI,WPSI,NPOINT)
C
WRITE(9,9001)
C
C   Calculo de coeficientes
C
FK      = 0
DO 1000 F = 0, FMAX
F2 = F+F
F2M1 = F2+1
RFG2= (F2+F2+1)
DO 1000 K = -F2, F2
FK = FK + 1
ABSK = IABS(K)
RFG1= RFG2*(FACTRL(F2-ABSK)/FACTRL(F2+ABSK))/FLOAT(1+KRO(K,0))
GL      = 0
DO 1000 G = 0, GMAX
G2 = G+G
RFG = (G2+G2+1)*RFG1
DO 1000 L = -G2, G2
GL = GL + 1
ABSL = IABS(L)
COF = 0.5*SQRT( RFG*(FACTRL(G2-ABSL)/FACTRL(G2+ABSL))
1      / (1+KRO(L,0)) ) /PI
C
C   Plgndr_function(f,k,t) = (-1)**k*Plgndr_libro(f,k,t)
C   SIGNKL = 2.D0*(-1)**ABSK*(-1)**ABSL*COF
C
SIGNKL = 2.D0*COF
DO 900 I = 1,3
KROI1 = KRO(I,1)
KROI2 = KRO(I,2)
KROI3 = KRO(I,3)
NOES3I = NOES3(I)
DO 900 J = 1,3
KROJ1 = KRO(J,1)
KROJ2 = KRO(J,2)
KROJ3 = KRO(J,3)
NOES3J = NOES3(J)
BPHI = 0.D0
BPSI = 0.D0
D1PHI = 0.D0
D1PSI = 0.D0
D2PHI = 0.D0
D2PSI = 0.D0
DO 700 NP = 1,NPOINT
X = XPHI(NP)
COSX = COS(X)
SINX = SIN(X)
BPHI = BPHI + WPHI(NP)*SIGNO(K,X)*SIGNO(L,X)
1      * ( KROI1*COSX + KROI2*SINX + KROI3 )
2      * ( KROJ1*COSX + KROJ2*SINX + KROJ3 )
D1PHI = D1PHI + WPHI(NP)*SIGNO(L,X)*SIGNO1(K,X)
1      * ( KROI1*COSX + KROI2*SINX + KROI3 )
2      * ( KROJ2*COSX - KROJ1*SINX )
D2PHI = D2PHI + WPHI(NP)*SIGNO(L,X)*SIGNO(K,X)
1      * ( KROI1*COSX + KROI2*SINX + KROI3 )
2      * ( KROJ1*COSX + KROJ2*SINX + KROJ3 )

```



```

X      = XPSI(NP)
COSX   = COS(X)
SINX   = SIN(X)
PLF2K  = PLGNDR(F2,ABSK,COSX)
PLG2L  = PLGNDR(G2,ABSL,COSX)
PLF2MK= PLGNDR(F2M1,ABSK,COSX)
BPSI   = BPSI   + WPSI(NP)*SINX*PLF2K*PLG2L
1      * ( KROI3*COSX + NOES3I*SINX )
2      * ( KROJ3*COSX + NOES3J*SINX )
D1PSI  = D1PSI + WPSI(NP)*PLF2K*PLG2L
1      * ( KROI3*COSX + NOES3I*SINX )
D2PSI  = D2PSI + WPSI(NP)*PLG2L
1      * ( (F2-ABSK+1)*PLF2MK
2      *   - (F2+1)*COSX*PLF2K )
1      * ( KROI3*COSX + NOES3I*SINX )
2      * ( NOES3J*COSX - KROJ3*SINX )
700 CONTINUE
B      = 3*SIGNKL* BPHI*BPSI
D      = SIGNKL*(D1PHI*D1PSI + D2PHI*D2PSI)
A(I,J,GL,FK) = B - D
C
AA      = B - D
NVAL = NVAL + 1
ICOD = F*10000000+(K+10)*100000+G*10000+(L+10)*100+I*10+J
WRITE(9,9000) F,K,G,L,I,J,BPHI,BPSI,
1      D1PHI,D1PSI,D2PHI,D2PSI,B,D,ICOD,NVAL
IF ( ABS(B) .GT. B3M ) THEN
    B3M = ABS(B)
    MB3 = NVAL
ENDIF
IF ( ABS(D) .GT. DM ) THEN
    DM = ABS(D)
    MD = NVAL
ENDIF
IF ( ABS(AA) .GT. AAM ) THEN
    AAM = ABS(AA)
    MAA = NVAL
ENDIF
IF ( ABS(BPHI) .GT. BPHIM ) THEN
    BPHIM = ABS(BPHI)
    MBPHI = NVAL
ENDIF
IF ( ABS(BPSI) .GT. BPSIM ) THEN
    BPSIM = ABS(BPSI)
    MBPSI = NVAL
ENDIF
IF ( ABS(D1PHI) .GT. D1PHIM ) THEN
    D1PHIM = ABS(D1PHI)
    MD1PHI = NVAL
ENDIF
IF ( ABS(D1PSI) .GT. D1PSIM ) THEN
    D1PSIM = ABS(D1PSI)
    MD1PSI = NVAL
ENDIF
IF ( ABS(D2PHI) .GT. D2PHIM ) THEN
    D2PHIM = ABS(D2PHI)
    MD2PHI = NVAL
ENDIF
IF ( ABS(D2PSI) .GT. D2PSIM ) THEN
    D2PSIM = ABS(D2PSI)
    MD2PSI = NVAL
ENDIF
900 CONTINUE
C
1000 CONTINUE

```

```

C
C      Fichero binario de salida de coeficientes funcion armonicas esfericos
C
      OPEN(1,FILE='SPHCOEF.10',FORM='UNFORMATTED',STATUS='UNKNOWN')
      WRITE(1) FMAX,GMAX,FK,GL,(((A(I,J,G,F),I=1,3),J=1,3),
1      G=1,GL),F=1,FK)
      CLOSE (1)

C
      WRITE(9,9001)
      WRITE(9,9010) BPHIM,BPSIM,D1PHIM,D1PSIM,D2PHIM,D2PSIM,B3M,DM
1      ,MBPHI,MBPSI,MD1PHI,MD1PSI,MD2PHI,MD2PSI,MB3,MD

C
      CLOSE(9)
      GO TO 1
6001 FORMAT(A,3(10X,A2,4X),2X,A)
6002 FORMAT(A,G15.8)
6003 FORMAT(A,I6 )
6005 FORMAT(A,G15.8)
6011 FORMAT(A,\)
7001 FORMAT(3(A,I5))
9000 FORMAT(4I4,2I2,6F9.3,2F9.5,I9,I5)
9001 FORMAT(/, '      F      K      G      L I J ','      BPHI ','      BPSI ',
1      '      D1PHI ','      D1PSI ','      D2PHI ','      D2PSI ',
2      '      B      ','      D      ','      Code ','      Nval ')
9010 FORMAT(/10X,'M ximo',4X, 8F9.3,/,20X,8I9,/)
      END

C
DOUBLE PRECISION FUNCTION SIGNO(K,X)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      INTEGER K
      IF (K) 100,200,300
100 SIGNO = SIN(-K*X)
      RETURN
200 SIGNO = 1.D0
      RETURN
300 SIGNO = COS(K*X)
      RETURN
      END

C
DOUBLE PRECISION FUNCTION SIGNO1(K,X)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      INTEGER K
      IF (K) 100,200,300
100 SIGNO1 =-K*COS(-K*X)
      RETURN
200 SIGNO1 = 0.D0
      RETURN
300 SIGNO1 = -K*SIN(K*X)
      RETURN
      END

C
INTEGER FUNCTION KRO(I,J)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      INTEGER I
      KRO = 0
      IF (I.EQ.J ) KRO = 1
      RETURN
      END

C
INTEGER FUNCTION NOES3(I)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      INTEGER I
      NOES3 = 1
      IF (I.EQ.3 ) NOES3 = 0

```

RETURN  
END

□

## 8.2 Distribución inicial de microfisuras.

El programa **NOR2** aquí incluido, calcula los coeficientes de la descomposición en armónicos esféricos de una población de microfisuras con una orientación preferente, que pueda aproximarse mediante una distribución normal bidimensional.

```

PROGRAM NOR2
C
C   Calcula los coeficientes de la descomposicion en armonicos
C   esfericos de una distribucion normal de fisuras N(PHI,PSI)
C   de media = (PHImed,PSImed) , varianza = (PHIvar,PSIvar) y
C   correlacion cero.
C
C   IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C   PARAMETER (NMAX=300)
C   REAL ALF(NMAX),NUMFIS
C   INTEGER I,F,K,ABSK,F2,KRO,NP,NPOINT,F2M1,FK
C   INTEGER NPUN
C   INTEGER FMAX
C   PARAMETER(NPUN=10000)
C   DOUBLE PRECISION XPSI(NPUN),WPSI(NPUN)
C   DOUBLE PRECISION XPHI(NPUN),WPHI(NPUN)
C   PARAMETER (PI=3.1415926535897932D0,PI2=2.D0*PI)
C
C   Distribucion normal
C
C   DNOR(X,XM,XS) = EXP(-0.5*((X-XM)/XS)**2)/(DSQRT(PI2)*XS)
C
C   DIM = (INT(SQRT(8*NMAX+1))-3)/4
C
C   Fichero binario de resultados de la descomposicion de la distribucion
C   (coeficientes de las funciones armonicas esfericas)
C
C   OPEN(9,FILE='NORMAL2.DAT',FORM='FORMATTED',STATUS='UNKNOWN',
1     ACCESS='APPEND')
C   Idem. fichero ASCII
C   OPEN(7,FILE='NORMAL2.BIN',FORM='UNFORMATTED',STATUS='UNKNOWN',
1     ACCESS='APPEND')
10  ALFMIN = 1.E+38
    ALFMAX =-1.E+38
    DO 20 I = 1,NMAX
20  ALF(I) = 0.
C
C   Orden de discretizacion Fmax, # puntos de integracion
C
C   WRITE(*,6011) '          Fmax (0=Stop)   = '
C   READ (*,*) FMAX
C   IF ( FMAX.EQ.0 ) GO TO 9900
C   IF ( FMAX.GT.DIM) STOP ' Incrementar dimension matriz A'
C   WRITE(*,6011) ' Num. puntos int. Gauss = '
C   READ (*,*) NPOINT
C
C   Datos de la distribucion
C
C   WRITE(*,6011) ' Numero de fisuras/volumen   = '
C   READ (*,*) NUMFIS
C   WRITE(*,6011) ' Media en direc. PSI (grados) = '
C   READ (*,*) PSIMED

```

```

WRITE(*,6011) ' Varianza en PSI      (grados) = '
READ (*,*) PSIVAR
WRITE(*,6011) ' Media en direc. PHI (grados) = '
READ (*,*) PHIMED
WRITE(*,6011) ' Varianza en PHI      (grados) = '
READ (*,*) PHIVAR
WRITE(9,7001) '      Fmax =',FMAX,
2      ' NPuntos =',NPOINT,
3      ' PSImed  =',PSIMED,
4      ' PSivar  =',PSIVAR,
5      ' PHImed  =',PHIMED,
6      ' PHivar  =',PHIVAR
PSIMED = PI*PSIMED/180.
PSIVAR = PI*PSIVAR/180.
PHIMED = PI*PHIMED/180.
PHIVAR = PI*PHIVAR/180.
C
C  Pesos de Gauss-Legendre para integracion en PHI entre (0,2*PI)
C
CALL GAULEG(0.D0,PI2,XPHI,WPHI,NPOINT)
C
C  Pesos de Gauss-Legendre para integracion en PSI entre (0,PI/2)
C
CALL GAULEG(0.D0,PI/2.D0,XPSI,WPSI,NPOINT)
C
C  Calculo de coeficientes
C
FK      = 0
DO 1000 F = 0,FMAX
F2 = F+F
F2M1 = F2+1
DO 1000 K = -F2, F2
FK = FK + 1
ABSK = IABS(K)
COF   =      DSQRT(( (4*F+1) / (2.D+0*FLOAT(1+KRO(K,0))*PI) )
1      * (FACTRL(F2-ABSK)/FACTRL(F2+ABSK) ) )
C
C  Plgndr_function(f,k,t) = (-1)**k*Plgndr_libro(f,k,t)
C
C
BPHI = 0.
BPSI = 0.
DO 700 NP = 1,NPOINT
X = XPHI(NP)
IF (ABS(PHIMED-X).LT.ABS(PHIMED-X-PI2)) THEN
BPHI = BPHI + WPHI(NP)*SIGNO(K,X)*DNOR(X,PHIMED,PHIVAR)
ELSE
BPHI = BPHI + WPHI(NP)*SIGNO(K,X)*DNOR(X+PI2,PHIMED,PHIVAR)
ENDIF
X      = XPSI(NP)
PLF2K = PLGNDR(F2,ABSK,COS(X))
BPSI = BPSI + WPSI(NP)*PLF2K*DNOR(X,PSIMED,PSIVAR)*SIN(X)
700 CONTINUE
ALFA = 2.D+0*COF *BPSI*BPHI
ALF(FK) = ALFA
IF ( ALFA.GT.ALFMAX ) THEN
ALFMAX = ALFA
MB2 = FK
ENDIF
IF ( ALFA.LT.ALFMIN ) THEN
ALFMIN = ALFA
MB1 = FK
ENDIF
C
1000 CONTINUE
C

```

```

C      Calcula factor para obtener NUMFIS fisuras/volumen
C
      VOL = ALF(1)*DSQRT(4*PI)
      FAC = NUMFIS/VOL
C
      WRITE(*,7005) ' ALFmax =',ALFMAX*FAC, ' FK =',MB2,
1      ' ALFmin =',ALFMIN*FAC, ' FK =',MB1,
2      ' Vol.    =',VOL
      WRITE(9,7005) ' ALFmax =',ALFMAX*FAC, ' FK =',MB2,
1      ' ALFmin =',ALFMIN*FAC, ' FK =',MB1,
2      ' Vol.    =',VOL
      WRITE(9,9001)
      WRITE(9,9000) ((F,K,FK,ALF(2*F*F+F+K+1)*FAC,K=-2*F,2*F),F=0,FMAX)
      WRITE(7) FMAX,NPOINT,SNGL(NUMFIS),SNGL(PSIMED),SNGL(PSIVAR),
1      SNGL(PHIMED),SNGL(PHIVAR),FK,(SNGL(ALF(I)*FAC),I=1,FK)
      GO TO 10
9900 CLOSE(7)
      CLOSE(9)
      RETURN
6011 FORMAT(A,\)
7001 FORMAT(A,I5,A,I5,/, (A,G11.2))
7005 FORMAT(A,E12.4,A,I5)
9000 FORMAT(3I5,F35.18)
9001 FORMAT(/, '      F      K      FK      ALFA ')
      END
C
DOUBLE PRECISION FUNCTION SIGNO(K,X)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      INTEGER K
      IF (K) 100,200,300
100  SIGNO = SIN(-K*X)
      RETURN
200  SIGNO = 1.D0
      RETURN
300  SIGNO = COS(K*X)
      RETURN
      END
C
INTEGER FUNCTION KRO(I,J)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      INTEGER I
      KRO = 0
      IF (I.EQ.J) KRO = 1
      RETURN
      END

```

□

### 8.3 Integración del sistema de ecuaciones diferenciales

El programa **CAL** aquí incluido, integra el sistema de ecuaciones diferenciales que representa la evolución de una población de microfisuras debida a convección pura. El movimiento del sólido se especifica mediante la rutina MOVIMI. Se han implementado los tres métodos de integración descritos en el apartado 4.6.4.5 del capítulo 4.

```

PROGRAM CAL
C
C   Calculo y dibujo de la evolucion de una poblacion de
C   microfisuras por conveccion pura
C
  PARAMETER (NMAX=231)
  COMMON /GAUL/A(3,3,NMAX,NMAX),H(10010,0:NMAX),DYDX(NMAX,NMAX),NC
  COMMON /CDIB/CAMLOC(3),IOPDIB,ICIC,TCIC,DTCIC,MOV
  CHARACTER MOV*52,SN*1
  INTEGER FMAX,GMAX,FK,GL,G,L,F,K,F2
  REAL C(NMAX),SC(NMAX)
  REAL GRADV(3,3)
  DATA C/NMAX*0./
  DATA INCPHI,INCPHI/ 9,3/
  DATA TIME,DT/0.,2.E-5/
C
C   Lectura de coeficientes constantes de la ec. diferencial
C   (calculados en programa GEN.FOR)
C
  OPEN(1,FILE='SPHCOEF.10',FORM='UNFORMATTED',STATUS='UNKNOWN')
  READ (1) FMAX,GMAX,FK,GL,(((A(I,J,G,F),I=1,3),J=1,3),
1    G=1,GL),F=1,FK)
  CLOSE (1)
C
C   Orden de discretizacion
C
10  NC = (FMAX+1)*(2*FMAX+1)
  WRITE(*,6000) FMAX,FK
  WRITE(*,6020) GMAX,GL
  WRITE(*,6008)
  READ (*,*) L
  FMAX = MAX(0,MIN(L,FMAX))
  NC = (FMAX+1)*(2*FMAX+1)
C
C   Factores suma de Fejer
C
  ND = (FMAX+1)**2
  IS = ND + 1
  RNC = ND
  DO 15 F = 0,FMAX
    F2 = F + F
    FK = F*(F2 + 1) + 1
    IS = IS - 1
    SC(FK) = IS/RNC
    DO 15 K = 1,F2
      IS = IS - 1
      SC(FK+K) = IS/RNC
      SC(FK-K) = IS/RNC
15  CONTINUE
C
C   Distribucion inicial poblacion de fisuras

```

```

C
60 CALL DISINI(IH,FMAX,MOV)
C
DO 80 I = 1,NC
80 C(I) = H(IH,I)
TINI = H(1,0)
TFIN = H(IH,0)
500 WRITE(*,6100)
READ(*,*) ICDLT
GO TO (1000,2000,3000,10,9000), ICDLT
GO TO 500
1000 IF (IH.NE.1) THEN
WRITE(*,6002) MOV
READ(*,6003) SN
IF (.NOT.(SN.EQ.'S'.OR. SN.EQ.'s')) GO TO 1005
ENDIF
C
C Movimiento del solido
C
CALL MOVIMI(GRADV,DIVV,MOV)
C
C Calculo Evolucion de las fisuras
C
1005 WRITE(*,6015) TFIN
TINI = TFIN
1010 WRITE(*,6013)
READ(*,*) TFIN
IF (TFIN.LE.TINI) GO TO 1010
WRITE(*,6005)
READ(*,*) DT
NCIC = MAX((TFIN-TINI)/DT,1)
WRITE(*,6006) NCIC
DT = (TFIN-TINI)/NCIC
1020 WRITE(*,6012)
READ(*,*) MET
GO TO (1100,1200,1300), MET
GO TO 1020
C
C Metodo 1 de calculo: integracion metodo de Euler
C
1100 TIME = TINI
DO 1150 I = 1,NCIC
TIME = TIME + DT
CALL EVOLEU(GRADV,DIVV,C,DT,NC)
IH = IH + 1
H(IH,0) = TIME
DO 1150 J = 1,NC
H(IH,J) = C(J)
1150 CONTINUE
GO TO 1400
C
C Metodo 2 de calculo: metodo de la Diferencia Central
C
1200 TIME = TINI
DO 1250 I = 1,NCIC
TIME = TIME + DT
CALL EVOLDC(GRADV,DIVV,C,DT,NC)
IH = IH + 1
H(IH,0) = TIME
DO 1250 J = 1,NC
H(IH,J) = C(J)
1250 CONTINUE
GO TO 1400
C
C Metodo 3 de calculo: integracion por Runge-Kutta

```



```

C
1300 WRITE(*,6014)
      READ(*,*) EPS
      CALL EVODE(GRADV,DIVV,C,DT,NC,TINI,TFIN,EPS,0.,NOK,NBAD,IH)
      WRITE(*,6130)
      WRITE(*,6131) NOK,NBAD,TINI,TFIN,EPS,NC
C
C      Salva calculo para posterior continuacion y/o dibujo y/o listado
C
1400 IF ( IH.GT.1 ) THEN
      OPEN(2,FILE='H.BIN',FORM='UNFORMATTED',STATUS='UNKNOWN')
      WRITE(2)FMAX,NC,IH,NMAX,GRADV,DIVV,MOV,((H(I,J),I=1,IH),J=0,NMAX)
      CLOSE (2)
      ENDIF
      GO TO 500
C
C      Dibujar
C
2000 READ(7,7000,ERR=2005,END=2005) IDEVN,CAMLOC,IOPDIB,ICS,T1,T2,T3
2002 IDEV = IDEVN
      CALL DEVSEL(IDEV,10,IERR)
      IF (IERR.EQ. 0) GO TO 2015
2005 CALL DIBINI
2010 WRITE(*,6060) 0.,TFIN,IH
      READ(*,*) T1
      T2 = T1
      T3 = 1.
      WRITE(*,6063)
      READ(*,*) ICS
2015 IF ( T2.EQ.0. ) T2 = T1
      IF ( T3.EQ.0. ) T3 = T2-T1
      IF ( T3.EQ.0. ) T3 = 1.
      DO 2350 TT=T1,T2,T3
      IF ( TT ) 2100,2200,2200
C      TT = -# Ciclo
2100 ICIC = -TT
      IF (ICIC.GT.IH ) GO TO 2010
      GO TO 2300
C      TT = Tiempo. Calcula # ciclo
2200 DO 2250 J = IH,1,-1
      IF ( TT.GE.H(J,0) ) GO TO 2260
2250 CONTINUE
2260 IF ( J.NE.IH .AND. (TT-H(J,0)) .GT. (H(J+1,0)-TT) ) J = J+1
      ICIC = J
C
2300 TCIC = H(ICIC,0)
      DTCIC = 0.
      IF ( ICIC.NE.1 ) DTCIC = H(ICIC,0) - H(ICIC-1,0)
      DO 2310 J = 1,NC
2310 C(J) = H(ICIC,J)
C
      IF ( ICS.EQ. 1 ) THEN
        DO 2320 J = 1,NC
2320 C(J) = C(J)*SC(J)
      ENDIF
C
2350 CALL DISCRK(C,NC,INCPHI,INCPHI,0)
      READ(7,7000,ERR=2400,END=2400) IDEVN,CAMLOC,IOPDIB,ICS,T1,T2,T3
      IF ( IDEV-IDEVN ) 2002,2015,2002
2400 CALL DIBFIN
      GO TO 500
C
C      Listado
C
3000 WRITE(*,*)' Muestra historia de pasos ya calculados '
```

```

WRITE(*,6001) ' Desde paso numero          = '
READ(*,*) IHI
WRITE(*,6010) ' Hasta paso (max', IH ,')    = '
READ(*,*) IHF
WRITE(*,6001) ' Incremento                  = '
READ(*,*) IHPA
WRITE(*,6003)
WRITE(*,6063)
READ(*,*) ICS
WRITE(*,6003)
IF ( ICS .NE. 1 ) ICS = 0
WRITE(*,6064) ((I,J,J=-2*I,2*I),I=0,2 )
OPEN(3,FILE='F3',FORM='FORMATTED',STATUS='UNKNOWN')
WRITE(3,6064) ((I,J,J=-2*I,2*I),I=0,2 )
DTCIC = 0.
DO 3150 ICIC =MAX(1,IHI),MIN(IH,IHF),MIN(IHPA,(IHF-IHI)/10)
  DO 3110 J = 1,NC
3110   C(J) = H(ICIC,J)
      IF ( ICS .EQ. 1 ) THEN
        DO 3120 J = 1,NC
3120   C(J) = C(J)*SC(J)
      ENDIF
      TCIC = H(ICIC,0)
      IF ( ICIC.NE.1 ) DTCIC = H(ICIC,0) - H(ICIC-1,0)
      CALL DISCRK(C,NC,INCPHI,INCPHI,1)
3150 CONTINUE
      CLOSE (3)
      GO TO 500
9000 STOP
6000 FORMAT(' Fmax =',I3,' FK =',I3)
6001 FORMAT(4X,A,\)
6002 FORMAT(/,' El movimiento del solido en calculo anterior es:',/,
1 A,/, ' "Desea especificar otro movimiento? (S/N) = ',\))
6003 FORMAT(A1)
6004 FORMAT(1P,100E10.2)
6005 FORMAT(' Paso de integracion (Dt)          = ',\))
6006 FORMAT(' Numero de Ciclos (< 0Termina) = ',I8)
6008 FORMAT(' Fmax c lculo = ',\))
6009 FORMAT(' F = ',\))
6010 FORMAT(4X,A,I6,A,\)
6011 FORMAT(5I12,10E12.4)
6012 FORMAT(/,' Metodo de integracion',/,
1 ' 1 = Euler ',/,
2 ' 2 = Diferencia Central ',/,
3 ' 3 = Runge-Kutta de 5 orden ',/,
4 ' Introducir metodo (1/2/3) = ',\))
6013 FORMAT(' Tiempo fin an lisis = ',\))
6014 FORMAT(' Criterio de convergencia = ',\,G12.4)
6015 FORMAT(/,' Tiempo comienzo del an lisis = ',1PG12.4)
6020 FORMAT(' Gmax =',I3,' GL =',I3)
6060 FORMAT(' T-=',F9.6,' T+=',F9.6,' # Cic. =',I6,
1 ' Time(+)/Cic(-) ? = ',\))
6061 FORMAT(I6,' Cic=',I6,I4,'% ',1P3E12.4,I5,': ',I2,': ',I2)
6063 FORMAT(' Suma de Fejer (1=Si,0=No) = ',\))
6064 FORMAT(' Max. Phi Psi Min. Phi Psi Ciclo Tiempo
1Dt ----- Coeficientes de los armonicos
2os esfericos -----',/,
3 63X,20(' (',I1,',',I2,')' )
6100 FORMAT(/,' "Calcular/Dibujar/Listar/Otra/Fin? (1/2/3/4/5)= ',\))
6130 FORMAT(/,' Nok', ' Nmal', ' Tini ', ' Tfin ',
1 ' Epsilon ', ' # C ')
6131 FORMAT(I6,I6,3G12.4,I6)
7000 FORMAT(I5,3G10.0,2I5,3G10.0)
END

```

C

```

SUBROUTINE DISINI(IH,FMAX,MOV)
C
C   Distribucion inicial poblacion de fisuras
C
  PARAMETER (NMAX=231)
  COMMON /GAUL/A(3,3,NMAX,NMAX),H(10010,0:NMAX),DYDX(NMAX,NMAX),NC
  DOUBLE PRECISION FACTRL,PI,PI2
  REAL NUMFIS,NUMF,GRADV(3,3)
  CHARACTER*52 MOV
  INTEGER FMAX,      FK,      F,K,ABSK,F2
  PARAMETER (PI=3.1415926535897932D0,PI2=2.D0*PI)
60 DO 70 I = 0,NMAX
70 H(1,I) = 0.
   IH = 1
80 WRITE(*,6010)
   READ(*,*) IDINI
   GO TO (100,200,400,300) , IDINI
   GO TO 80
C
C   Uniforme
C
100 F = 0
   K = 0
   WRITE(*,6023)
   READ(*,*) NUMFIS
   GO TO 210
C
C   Armonico esferico de orden (f,k)
C   (0,0) = distribucion uniforme
C
200 WRITE(*,6000) FMAX
   WRITE(*,6001)
   READ(*,*) F
   WRITE(*,6002) 2*F
   WRITE(*,6003)
   READ(*,*) K
   NUMFIS = DSQRT(4*PI)
210 FK    = F*(2*F+1)+K+1
   F2    = F+F
   ABSK   = IABS(K)
   H(1,FK) = DSQRT( ( (F2+F2+1)/FLOAT(1+KRO(K,0)) ) )
1      *( FACTRL(F2-ABSK)/FACTRL(F2+ABSK) )/PI2 )
2      *(NUMFIS/DSQRT(4*PI))
   RETURN
C
C   Continuacion a partir calculo anterior
C
300 OPEN(2,FILE='H.BIN',FORM='UNFORMATTED',STATUS='UNKNOWN')
   READ(2)FMAX,NC,IH,NNMAX,GRADV,DIVV,MOV,((H(I,J),I=1,IH),J=0,NNMAX)
   CLOSE (2)
   RETURN
C
C   Distribuciones Gaussianas calculadas anteriormente
C   (en programa NOR2)
C
400 OPEN(7,FILE='NORMAL2.BIN',FORM='UNFORMATTED',STATUS='UNKNOWN')
   IV = 0
   WRITE(*,6023)
   READ(*,*) NUMFIS
   WRITE(*,6004)
   WRITE(*,*) ' # Dis. PSImed PSIVar PHImed PHIVar Fis/vol Fmax Punto
1s'
410 READ(7,END=420)  FMAX,NPOINT,NUMF,PSIMED,PSIVAR,PHIMED,PHIVAR,
1      FK,(H(1,I),I=1,FK)
   IV = IV + 1

```

```

        WRITE(*,6022) IV,PSIMED*180./PI,MIN(PSIVAR*180./PI,999),
1          PHIMED*180./PI,MIN(PHIVAR*180./PI,999),
1          NUMF,FMAX,NPOINT
        GO TO 410
420 IF (IV.EQ.0) THEN
        WRITE(*,*) ' No hay distribuciones Gaussianas calculadas'
        GO TO 60
    ENDIF
430 WRITE(*,6021)
    READ(*,*) J
    IF ( J.LT.1 .OR. J .GT. IV ) GO TO 430
    REWIND (7)
    DO 440 I=1,J-1
440 READ(7)
    READ(7) FMAX,NPOINT,NUMF,PSIMED,PSIVAR,PHIMED,PHIVAR,
1          FK,(H(1,I),I=1,FK)
    CLOSE(7)
    DO 450 I = 1,FK
450 H(1,I) = H(1,I)*NUMFIS/NUMF
    RETURN
6000 FORMAT(' Fmax =',I3)
6001 FORMAT(' F = ',\ )
6002 FORMAT(' Kmax = +-',I2)
6003 FORMAT(' K = ',\ )
6004 FORMAT(/)
6010 FORMAT(/' Distribucion inicial poblacion de fisuras ',/,
1      ' 1 = Uniforme (0,0) ',/,
2      ' 2 = Armonico esferico de orden (f,k) ',/,
3      ' 3 = Gaussiana en direccion Phi Y Psi ',/,
4      ' 4 = Continuacion a partir calculo anterior',/,
5      ' Introducir tipo de distribucion (1,2,3,4) = ',\ )
6021 FORMAT(/' Elegir numero de distribucion = ',\ )
6022 FORMAT(I8,4F7.2,F8.0,I5,I6)
6023 FORMAT(/' Densidad de fisuras (Num. Fisuras/Volumen) = ',\ )
    END
C
    SUBROUTINE MOVIMI(GRADV,DIVV,MOV)
C
C    Movimiento del solido
C    GRADV(i,j) = dv(j)/dx(i) (Traspuesta del gradiente de velocidad)
C    DIVV      = Divergencia de la velocidad
C
    REAL GRADV(3,3),NU
    CHARACTER*52 MOV
20 WRITE(*,6101)
    READ(*,*,ERR=20) V
21 WRITE(*,6102)
    READ(*,*,ERR=21) MOVTIP
    DIVV = 0.
    DO 22 I = 1,3
    DO 22 J = 1,3
22 GRADV(I,J) = 0.
    GO TO (31,32,33,34,35,36,30,30,30,40,41,42), MOVTIP
    GO TO 21
C    Coef. Poisson
30 WRITE(*,6103)
    READ(*,*,ERR=30) NU
    IF ( NU.LT.0. OR. NU.GT. 0.5 ) GO TO 30
    DIVV = V*(1-2.*NU)
    GO TO (37,38,39), MOVTIP-6
31 MOV = ' Cortante simple en plano YZ segun Y V=( 0,vZ, 0) '
    GRADV(3,2) = V
    RETURN
32 MOV = ' Cortante simple en plano YZ segun Z V=( 0, 0,vY) '
    GRADV(2,3) = V

```

```

RETURN
33 MOV = ' Cortante simple en plano XZ segun X    V=(vZ, 0, 0) '
    GRADV(3,1) = V
    RETURN
34 MOV = ' Cortante simple en plano XZ segun Z    V=( 0, 0,vX) '
    GRADV(1,3) = V
    RETURN
35 MOV = ' Cortante simple en plano XY segun X    V=(vY, 0, 0) '
    GRADV(2,1) = V
    RETURN
36 MOV = ' Cortante simple en plano XY segun Y    V=( 0,vX, 0) '
    GRADV(1,2) = V
    RETURN
37 MOV = ' Traccion segun eje X                    V=(v*X,-nu*v*Y,-nu*v*Z) '
    GRADV(1,1) = V
    GRADV(2,2) = -V*NU
    GRADV(3,3) = -V*NU
    RETURN
38 MOV = ' Traccion segun eje Y                    V=(-nu*v*X,v*Y,-nu*v*Z) '
    GRADV(1,1) = -V*NU
    GRADV(2,2) = V
    GRADV(3,3) = -V*NU
    RETURN
39 MOV = ' Traccion segun eje Z                    V=(-nu*v*X,-nu*v*Y,v*Z) '
    GRADV(1,1) = -V*NU
    GRADV(2,2) = -V*NU
    GRADV(3,3) = V
    RETURN
40 MOV = ' Rotacion segun eje X                    V=( 0, -w*Z, w*Y) '
    GRADV(2,3) = V
    GRADV(3,2) = -V
    RETURN
41 MOV = ' Rotacion segun eje Y                    V=( w*Z, 0, -w*X) '
    GRADV(1,3) = -V
    GRADV(3,1) = V
    RETURN
42 MOV = ' Rotacion segun eje Z                    V=( -w*Y, w*X, 0) '
    GRADV(1,2) = V
    GRADV(2,1) = -V
    RETURN
6101 FORMAT(/' Velocidad de deformacion o rotacion (1/Seg.) = ',\ )
6102 FORMAT(/' Movimiento del solido                ',/,/,
1      ' 1 = Cortante simple en plano YZ segun Y    ',/,/,
2      ' 2 = Cortante simple en plano YZ segun Z    ',/,/,
3      ' 3 = Cortante simple en plano XZ segun X    ',/,/,
4      ' 4 = Cortante simple en plano XZ segun Z    ',/,/,
5      ' 5 = Cortante simple en plano XY segun X    ',/,/,
6      ' 6 = Cortante simple en plano XY segun Y    ',/,/,
7      ' 7 = Traccion segun eje X                    ',/,/,
8      ' 8 = Traccion segun eje Y                    ',/,/,
8      ' 9 = Traccion segun eje Z                    ',/,/,
8      ' 10 = Rotacion segun eje X                   ',/,/,
8      ' 11 = Rotacion segun eje Y                   ',/,/,
9      ' 12 = Rotacion segun eje Z                   ',/,/,
A      ' Introducir tipo de movimiento (1 a 12)      = ',\ )
6103 FORMAT(/' Coeficiente de Poisson ( 0 < NU < 0.5 ) = ',\ )
END

```

C

**SUBROUTINE EVOLEU(GRADV,DIVV,C,DT,N)**

C

Integracion por el Metode de Euler

C

PARAMETER (NMAX=231)

COMMON /GAUL/A(3,3,NMAX,NMAX),H(10010,0:NMAX),DYDX(NMAX,NMAX),NC  
 DIMENSION B(NMAX)

```

        DIMENSION GRADV(3,3),C(N)
        INTEGER FK,GL
        DO 2200 GL = 1,N
        DCGL = DIVV*C(GL)
        DO 2100 FK = 1,N
        GLFK = 0.
        DO 2000 I = 1,3
        DO 2000 J = 1,3
2000    GLFK = GLFK + A(I,J,GL,FK)*GRADV(I,J)
2100    DCGL = DCGL + C(FK)*GLFK
        B(GL) = C(GL) + DCGL*DT
2200    CONTINUE
        DO 3000 I = 1,N
3000    C(I) = B(I)
        RETURN
        END
C
        SUBROUTINE EVOLDC(GRADV,DIVV,C,DT,N)
C
C        Metodo de la Diferencia Central
C
        PARAMETER (NMAX=231)
        COMMON /GAUL/A(3,3,NMAX,NMAX),H(10010,0:NMAX),DYDX(NMAX,NMAX),NC
        DIMENSION B(NMAX)
        DIMENSION GRADV(3,3),C(N)
        INTEGER FK,GL
        DT2 = DT/2.
        DO 2200 GL = 1,N
        DCGL = DIVV*C(GL)
        DO 2100 FK = 1,N
        GLFK = 0.
        DO 2000 I = 1,3
        DO 2000 J = 1,3
2000    GLFK = GLFK + A(I,J,GL,FK)*GRADV(I,J)
2100    DCGL = DCGL + C(FK)*GLFK
        B(GL) = C(GL) + DCGL*DT2
2200    CONTINUE
C
        DO 3200 GL = 1,N
        DCGL = DIVV*B(GL)
        DO 3100 FK = 1,N
        GLFK = 0.
        DO 3000 I = 1,3
        DO 3000 J = 1,3
3000    GLFK = GLFK + A(I,J,GL,FK)*GRADV(I,J)
3100    DCGL = DCGL + B(FK)*GLFK
        C(GL) = C(GL) + DCGL*DT
3200    CONTINUE
        RETURN
        END
C
        SUBROUTINE EVODE(GRADV,DIVV,C,DT,N,TINI,TFIN,EPS,HMIN,NOK,NBAD,IH)
C
C        Integracion por el Metodo de Runge-Kutta de quinto orden
C        (vease Numerical Recipes in Fortran 2 edition)
C
        EXTERNAL DERIVS,RKQS
        PARAMETER (NMAX=231,KMAXX=400)
        COMMON /path/ kmax,kount,dxsav,xp(KMAXX),yp(NMAX,KMAXX)
        COMMON /GAUL/A(3,3,NMAX,NMAX),H(10010,0:NMAX),DYDX(NMAX,NMAX),NC
        DIMENSION GRADV(3,3),C(N)
        INTEGER FK,GL
        DO 2200 GL = 1,N
        DO 2100 FK = 1,N
        GLFK = 0.

```

```

      DO 2000 I = 1,3
      DO 2000 J = 1,3
2000  GLFK = GLFK + A(I,J,GL,FK)*GRADV(I,J)
2100  DYDX(GL,FK) = GLFK
2200  DYDX(GL,GL) = DIVV + DYDX(GL,GL)
      CALL ODEINT(C,N,TINI,TFIN,EPS,DT,HMIN,NOK,NBAD,DERIVS,RKQS)
      DO 3100 I = 1,KOUNT
      H(IH,0) = XP(I)
      DO 3000 J = 1,N
3000  H(IH,J) = YP(J,I)
3100  IH = IH + 1
      IH = IH - 1
      RETURN
      END

C
      SUBROUTINE DERIVS(TDUMMY,C,DC)
      PARAMETER (NMAX=231)
      COMMON/GAUL/A(3,3,NMAX,NMAX),H(10010,0:NMAX),DYDX(NMAX,NMAX),NC
      DIMENSION C(NMAX),DC(NMAX)
      DO 2000 GL = 1,NC
      DCGL= 0.
      DO 1000 FK = 1,NC
1000  DCGL = DCGL + DYDX(GL,FK)*C(FK)
2000  DC(GL) = DCGL
      RETURN
      END

C
      SUBROUTINE DISCRK(C,NC,INCPHI,INCPSI,IDIBU)
      COMMON /CDIB/RDUMMY(3),IDUMMY,ICIC,TCIC,DTCIC,MOV
      CHARACTER*52 MOV
      REAL NCRACK(0:360,0:90),C(NC),Z(361,91)
      DOUBLE PRECISION SIGNO,PLGNDR,PI,PI2,XPHI,COSPSI,GRA2RAD,FACTRL
      INTEGER F,K,F2,ABSK,PHI,PSI,PHIMAX,PSIMAX,PHIMIN,PSIMIN,FK,FMAX
      PARAMETER (PI=3.1415926535897932D0,PI2=2.D0*PI,GRA2RAD=PI2/360.D0)
      FMAX = (INT( SQRT(8*NC+1.1 ) ) - 3)/4
      ACMAX = -1.E38
      ACPMIN = 1.E38
      IPHI = 0
      DO 1500 PHI = 0,360,INCPHI
      XPHI = PHI*GRA2RAD
      IPHI = IPHI+1
      IPSI = 0
      DO 1500 PSI = 0, 90,INCPSI
      IPSI = IPSI+1
      AC = 0.
      COSPSI = DCOS(PSI*GRA2RAD)
      DO 1400 F = FMAX,0,-1
      F2 = F+F
      FK = F*(F2+1)+1
      DO 1400 K = -F2, F2
      ABSK = IABSK(K)
      CFK = C(FK+K)*DSQRT( ( (F2+F2+1)/FLOAT(1+KRO(K,0)) )
1      * ( FACTRL(F2-ABSK)/FACTRL(F2+ABSK) )/PI2 )
1400 AC = AC+CFK*SIGNO(K,XPHI)*PLGNDR(F2,ABSK,COSPSI)
      IF ( AC .GT. ACMAX ) THEN
      ACMAX = AC
      PHIMAX = PHI
      PSIMAX = PSI
      ENDIF
      IF ( AC .LT. ACPMIN ) THEN
      ACPMIN = AC
      PHIMIN = PHI
      PSIMIN = PSI
      ENDIF
      Z(IPHI,IPSI) = AC

```

```

1500 NCRACK(PHI,PSI) = AC
      IF( IDIBU.EQ.0 ) THEN
          CALL DIB(IPHI,IPSI,Z,PHIMAX,PSIMAX)
      ELSE
          WRITE(*,3000) ACMAX,PHIMAX,PSIMAX,ACMIN,PHIMIN,PSIMIN
1          ,ICIC,TCIC,DTCIC,(C(I),I=1,MIN(7,NC))
          WRITE(3,3000) ACMAX,PHIMAX,PSIMAX,ACMIN,PHIMIN,PSIMIN
1          ,ICIC,TCIC,DTCIC,(C(I),I=1,NC)
      ENDIF
      RETURN
3000 FORMAT(F10.4,I4,I3,F11.4,I4,I3,I6,1P2E11.2,0P1000F7.2)
      END

```

C

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION SIGNO(K,X)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      INTEGER K
      IF (K) 100,200,300
100 SIGNO = SIN(-K*X)
      RETURN
200 SIGNO = 1.D0
      RETURN
300 SIGNO = COS(K*X)
      RETURN
      END

```

C

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION SIGNO1(K,X)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      INTEGER K
      IF (K) 100,200,300
100 SIGNO1 = -K*COS(-K*X)
      RETURN
200 SIGNO1 = 0.D0
      RETURN
300 SIGNO1 = -K*SIN(K*X)
      RETURN
      END

```

C

```

INTEGER FUNCTION KRO(I,J)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      INTEGER I
      KRO = 0
      IF (I.EQ.J ) KRO = 1
      RETURN
      END

```

□



#### 8.4 Representación gráfica de resultados.

El programa **DIB** representa gráficamente la distribución de una población de microfisuras.

Este módulo es llamado por el programa de cálculo **CAL** para la visualización de resultados en cada instante de tiempo especificado por el usuario.

```

SUBROUTINE DIB(NPHI,NPSI,Z,PHIMAX,PSIMAX)
C
C   Representacion grafica de una poblacion de microfisuras
C   Modulo llamado por el programa CAL.FOR
C   (requiere otras rutinas graficas basicas no incluidas
C   y la biblioteca DIGLIB, vease ref. en el texto)
C
C
COMMON /CDIB/CAMLOC(3),IOPDIB,IH,TIME,DT,MOV
CHARACTER*52 MOV
INTEGER PHIMAX,PSIMAX
DIMENSION Z(361,91),XYLIM(2,6)
DIMENSION DEVCHR(15)
CHARACTER*1 IZ(362,92)
CHARACTER*100 DESC
ZMIN = 1.E38
ZMAX = -1.E38
DO 100 I = 1,NPHI
DO 100 J = 1,NPSI
ZMIN = MIN(ZMIN,Z(I,J))
100 ZMAX = MAX(ZMAX,Z(I,J))
XYLIM(1,1)= 0.0
XYLIM(2,1)=360.0
XYLIM(1,2)= 0.0
XYLIM(2,2)= 90.0
IF ( ZMIN.NE.ZMAX ) THEN
XYLIM(1,3)=ZMIN*0.9999
XYLIM(2,3)=ZMAX*1.0001
ELSE
XYLIM(1,3)=MIN(0.,ZMIN)
XYLIM(2,3)=MAX(0.,ZMIN)
ENDIF
C   XYLIM(1,3)= ZMIN*0.999999
C   XYLIM(2,3)= ZMAX*1.00001
XYLIM(1,4)= 4.
XYLIM(2,4)= 2.
CALL GSDRVVR(7,DEVCHR,DUMMY)
XYLIM(1,5)=DEVCHR(2)
XYLIM(2,5)=DEVCHR(3)
XYLIM(1,6)=0.2
XYLIM(2,6)=1.
C   call rdplot(' ', ' ')
call bgnplt
call fulmap
CALL PURJOY(Z,361,IZ,NPHI,NPSI,CAMLOC,XYLIM,'Eje PHI'C,
$'Eje PSI'C,'Dens. fisuras'C,GOODCS(0.27),IOPDIB)
WRITE(DESC,6000) ZMAX,PHIMAX,PSIMAX,IH,TIME,DT,CHAR(0)
CALL GSSETC(GOODCS(0.27*XYLIM(1,5)/25.),0.)
CALL GSMOVE(0.5,0.5)
CALL GSPSTR(DESC)

```

```

WRITE (DESC, 6001)  MOV, CHAR(0)
CALL GSSETC (GOODCS (0.27*XYLIM(1,5)/25.), 0.)
CALL GSMOVE (0.5, 1.2)
CALL GSPSTR (DESC)
call rdplot('          ', '          ')
RETURN
6000 FORMAT(          ' Z+=', F7.2, ' Phi=', I4,
1  ' Psi=', I4, ' Cic.', I6, ' T=', 1PE9.2, ' Dt=', E9.2, A1)
6001 FORMAT(A, A1)
END
C
SUBROUTINE DIBINI
COMMON /CDIB/CAMLOC(3), IOPDIB, IH, TIME, DT, MOV
CHARACTER*52 MOV
WRITE(*, 760)
write(*, 762)
read(*, 761) camloc(1)
IF ( CAMLOC(1) .LE. 0. ) GO TO 999
write(*, 763)
read(*, 761) camloc(2)
write(*, 765)
read(*, 761) camloc(3)
write(*, 766)
read(*, 767) IOPDIB
WRITE(*, 760)
IOPDIB = MIN(7, MAX(IOPDIB, 0))
CALL SELDEV(10)
999 RETURN
12 FORMAT(1x, 'device id = ', i2)
13 FORMAT(1x, i2, 1x)
760 FORMAT(/)
761 FORMAT(G10.0)
762 FORMAT(' Distancia de la superficie = ', \)
763 FORMAT(' Angulo entre el observador y eje X (grados) = ', \)
765 FORMAT(' Angulo entre el observador y el plano XY = ', \)
766 FORMAT(' Opcion de dibujo = ', \)
767 FORMAT(I5)
END
C
SUBROUTINE DIBFIN
CALL ENDPLT
CALL RLSDEV
RETURN
END

```

□

## 8.5 Rutinas auxiliares

Las rutinas básicas de cálculo numérico aquí incluidas, son llamadas por los anteriores programas y están tomadas de “Numerical Recipes in Fortran”, Press, William H., y otros (1992) [103].

Las rutinas de integración de las ecuaciones del movimiento por el método de Runge-Kutta también se han adaptado de la anterior referencia. Su listado no se incluye dado su volumen y no ser necesarias para incluir el modelo de material en un programa de elementos finitos (véase apartado 4.6.4.5 del capítulo 4).

```

SUBROUTINE gauleg(x1,x2,x,w,n)
  INTEGER n
  DOUBLE PRECISION x1,x2,x(n),w(n)
  DOUBLE PRECISION EPS
  PARAMETER (EPS=1.d-14)
  INTEGER i,j,m
  DOUBLE PRECISION p1,p2,p3,pp,xl,xm,z,z1
  m=(n+1)/2
  xm=0.5d0*(x2+x1)
  xl=0.5d0*(x2-x1)
  do 12 i=1,m
    z=cos(3.141592654d0*(i-.25d0)/(n+.5d0))
1    continue
    p1=1.d0
    p2=0.d0
    do 11 j=1,n
      p3=p2
      p2=p1
      p1=((2.d0*j-1.d0)*z*p2-(j-1.d0)*p3)/j
11   continue
      pp=n*(z*p1-p2)/(z*z-1.d0)
      z1=z
      z=z1-p1/pp
      if(abs(z-z1).gt.EPS) goto 1
      x(i)=xm-xl*z
      x(n+1-i)=xm+xl*z
      w(i)=2.d0*xl/((1.d0-z*z)*pp*pp)
      w(n+1-i)=w(i)
12  continue
  return
END
C (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software !"#.
FUNCTION plgndr(l,m,x)
  INTEGER l,m
  DOUBLE PRECISION plgndr,x
  INTEGER i,ll
  DOUBLE PRECISION fact,p11,pmm,pmmpl,somx2
  if(m.lt.0.or.m.gt.l.or.abs(x).gt.1.d0) pause
  *'bad arguments in plgndr'
  pmm=1.d0
  if(m.gt.0) then
    somx2=sqrt((1.d0-x)*(1.d0+x))
    fact=1.d0
    do 11 i=1,m
      pmm=-pmm*fact*somx2
      fact=fact+2.d0

```

```

11      continue
endif
if(l.eq.m) then
  plgndr=pmm
else
  pmmp1=x*(2*m+1)*pmm
  if(l.eq.m+1) then
    plgndr=pmmp1
  else
    do 12 ll=m+2,1
      pll=(x*(2*ll-1)*pmmp1-(ll+m-1)*pmm)/(ll-m)
      pmm=pmmp1
      pmmp1=pll
12      continue
      plgndr=pll
    endif
  endif
return
END
C (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software !"#.
FUNCTION factrl(n)
  INTEGER n
  DOUBLE PRECISION factrl
CU  USES gammln
  INTEGER j,ntop
  DOUBLE PRECISION a(33),gammln
  SAVE ntop,a
  DATA ntop,a(1)/0,1.d0/
  if (n.lt.0) then
    pause 'negative factorial in factrl'
  else if (n.le.ntop) then
    factrl=a(n+1)
  else if (n.le.32) then
    do 11 j=ntop+1,n
      a(j+1)=j*a(j)
11      continue
      ntop=n
      factrl=a(n+1)
    else
      factrl=exp(gammln(n+1.d0))
    endif
  return
END
C (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software !"#.
FUNCTION gammln(xx)
  DOUBLE PRECISION gammln,xx
  INTEGER j
  DOUBLE PRECISION ser,stp,tmp,x,y,cof(6)
  SAVE cof,stp
  DATA cof,stp/76.18009172947146d0,-86.50532032941677d0,
*24.01409824083091d0,-1.231739572450155d0,.1208650973866179d-2,
*-.5395239384953d-5,2.5066282746310005d0/
  x=xx
  y=x
  tmp=x+5.5d0
  tmp=(x+0.5d0)*log(tmp)-tmp
  ser=1.000000000190015d0
  do 11 j=1,6
    y=y+1.d0
    ser=ser+cof(j)/y
11  continue
  gammln=tmp+log(stp*ser/x)
  return
END
C (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software !"#.

```

□

## **8. BIBLIOGRAFÍA**

## **8. BIBLIOGRAFÍA**

- 
- [1] ABAQUS. USA : Hibbitt, Karlsson and Sorensen.
  - [2] ABRAHAM, RALPH ; MARSDEN, JERROLD E. ; TUDORS, RATIU (1988). *Manifolds, tensor analysis and applications*. Second Edition. New York : Sringer-Verlag.
  - [3] ABRAHAM, RALPH ; MARSDEN, JERROLD E. (1978). *Foundations of Mechanics*. 2nd ed. Massachusetts : Benjamin Cummings.
  - [4] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions*. Washington : National Bureau of Standards.
  - [5] ADINA- A Finite Element Program for Automatic Dynamic Incremental nonlinear analysis. BATHE, J. K. Report 82448-1, Acoustics and Vibration Lab., Dept. Mech. Eng., M.I.T. (September 1975, rev. December 1978).
  - [6] AHEIZER, N. I. ; KREIN, M. (1962). *Some questions in the Theory of Moments*. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society.
  - [7] ANSYS *Theoretical Manual*. USA : Swanson Analysis Systems.
  - [8] APOSTOL, TOM M. (1989). *Calculus*, vol. II. 2ª ed. Madrid : Reverté.
  - [9] BATAILLE, J. ; KESTIN, J. (1979). Irreversible Processes and Physical Interpretation of Rational Thermodynamics. *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, vol. 4, nº 4, págs. 229-258.
  - [10] BATHE, K. J. (1985). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. New Jersey : Prentice Hall.
  - [11] BEREMIN, F. M. (1983). A Local Criterion for Cleavage Fracture of a Nuclear Pressure Vessel Steel. *Metallurgical Transactions A*, vol 14A, págs. 2277-2287.
  - [12] BERRY, J. P. (1960). Some kinetic considerations of the Griffith criterion for fracture. I. Equations of motion at constant force. *Journal of the Mechanics and Physics Solids*, nº 8, págs. 194-206.
  - [13] BERRY, J. P. (1960). Some kinetic considerations of the Griffith criterion for fracture. II. Equations of motion at constant displacement. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, nº 8, págs. 207-216.
  - [14] BERTHAUD, Y. ; PIJAUDIER-CABOT, G. Non-local Continuum and Micromechanics of Damage in Quasi-Brittle Materials.
  - [15] BILEK, ZDENEK (1987). Dynamic Fracture Studies Overview. *Anales de Mecánica de la Fractura*. Comunicación presentada en el cuarto encuentro del Grupo español de Fractura, Braga (Portugal), 23-24 de Abril de 1987.
  - [16] BISHOP, R.L. ; GOLDBERG, S. I. (1980). *Tensor Analysis on Manifolds*. New York : Dover Publications Company.
  - [17] BRAND, H. R. *DIGLIB (Device Independent Graphics LIBrary)*. Livermore : Lawrence Livermore National Laboratory.
  - [18] BRAR, N. S. ; BLESS, S. J. ; ROSENBERG, Z. New Experimental



- Techniques to Study Damage Evolution in Brittle Materials.
- [19] BRIGNOLI, M. ; SARTORI, L. (1993). Incremental Constitutive Relations for the Study of Wellbore Failure. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 1319-1322.
  - [20] BROEK, DAVID (1989). *The Practical Use of Fracture Mechanics*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
  - [21] BUCK, BRIAN ; MACAULAY, VINCENT A. (1991). *Maximum Entropy in Action : A Collection of Expository Essays*. Oxford : Clarendon Press.
  - [22] BUDIANSKY, B. ; O'CONNELL, R. J. (1976). Elastic Modeling of a Cracked Solid. *Int. J. Sol. Struct.*, vol 12, págs. 81-97.
  - [23] CASIMIR, H. (1945). On Onsager's principle of microscopic reversibility. *Rev. Mod. Phys.*, nº 17, págs. 343-350.
  - [24] COLEMAN, B. D. ; GURTIN, M. E. (1967). Thermodynamics with Internal State Variables. *The Journal of Chemical Physics*, vol 47, nº 3, págs. 597-613.
  - [25] COSMOS. Santa Monica : Structural Research and Analysis Corporation.
  - [26] COSTIN, L. S. ; DUFFY, J. ; FREUND, L. B. (1977). Fracture initiation in metals under stress wave loading conditions. En, *Fast fracture and Crack Arrest*. Special Technical Publication 627. Philadelphia : American Society for Testing and Materials, págs. 301-318.
  - [27] COWIN, C. (1985). The Relationship Between the Elasticity Tensor and the Fabric Tensor. *Mechanics of Materials*, nº 4, págs. 137-147.
  - [28] CURRAN, D. R.; SEAMAN, L.; SHOCKEY, D. A. (1987). Dynamic Failure of Solids. *Physics Reports*, vol. 147, nº 5-6, págs. 253-388.
  - [29] CHABOCHE, J. L. (1986). Continuum Damage Mechanics : Present State and Future Trends. Séminaire International sur l'Approche Locale de la Rupture. Documents de conférence. Moret-sur-Loing (France) : Centre de Recherches EDF " Les Renardières".
  - [30] CHENG, H. ; DUSSEAU, M. B. (1993). Deformation and Diffusion Behaviour in a Solid Experiencing Damage : a Continuous Damage Model and Its Numerical Implementation. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 1323-1331.
  - [31] CHEREPANOV, G. P. (1979). *Mechanics of Brittle Fracture*. New York : McGraw-Hill.
  - [32] CHUDNOVSKY, A. ; DOLGOPOLSKY, A. ; KACHANOV, M. (1987). Elastic Interaction of a Crack a Microcrack Array. I. Formulation of the problem and general form of the solution. *Int. J. Solids Structures*, vol. 23 nº 1, págs. 1-10.
  - [33] DAFALIAS, Y. F. (1983). Corotational Rates for Kinematic Hardening at Large Plastic Deformations. *Journal of Applied Mechanics*, vol 50, págs. 561-565.
  - [34] DAVISON, L.; GRAHAN, R. A. (1979). *Shock Compression of Solids*.

- Physics Reports* , vol. 55, pág. 255-379.
- [35] DOWSON, D. C. ; WRAGG, A. (1973). Maximum-Entropy Distributions Having Prescribed First and Second Moments. *IEEE Transactions on Information Theory*, págs. 689-693.
  - [36] DULANEY, E. N. ; BRACE, W. F. (1960). Velocity behavior of a growing crack. *Journal of Applied Physics*, nº 31, págs. 2233-2236.
  - [37] DYSKIN, A. V. ; GERMANOVICH, L. N. (1993). A Model of Crack Growth in Microcracked Rock. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 813-820.
  - [38] ENGLEMAN, L. B. (1991). *NIKE-2D, a Nonlinear, Implicit, Two-Dimensional Finite Element Code for Solid Mechanics. User Manual*. Lawrence Livermore National Library, Rept. UCLR-MA-105413.
  - [39] FLANAGAN, D. P. ; TAYLOR, L. M. (1987). An Accurate Numerical Algorithm for Stress Integration with Finite rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, nº 62, págs. 305-320.
  - [40] FOURNEY, W. L. ; ET. AL. Fragmentation Studies in Jointed Brittle Material. Maryland : University of Maryland.
  - [41] FREUND, L. B. (1990). *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge : Cambridge University Press.
  - [42] FUNG, Y. C. (1965). *Foundations of Solid Mechanics*. ENGLEWOOD CLIFFS : PRENTICE-HALL.
  - [43] GERMAIN, P. (1973). *Cours de Mécanique des Milieux Continus. Tome I : Théorie Générale*. Paris : Masson et Cie Editeurs.
  - [44] GERMAIN, P. ; MULLER P. (1980). *Introduction a la mécanique des milieux continus*. Paris : Masson.
  - [45] GERMAIN, P. ; NGUYEN; Q. S. ; SUQUET, P. (1983). Continuum Thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, págs. 1010-1020.
  - [46] GOODMAN, J. (1985). Structural Fragility and Principle of Maximun Entropy. *Structural Safety*, nº 3, págs. 37-46.
  - [47] GOODS, S. H. ; BROWN, L. M. (1979). *Acta Metall.* , nº 27, pág. 1.
  - [48] GRADY, D. E. (1984). The Mechanics of Fracture under High-rate Stress Loading. *Proc. William Prager Symp. Mech. Geomaterials : Rocks, Concrete, Soils, Int. Union Theoretical and Applied Mechanics*, Northwestern University, Evanston, Il., 11-18 septiembre 1984.
  - [49] GRADY, D. E. ; KIPP, M. E. (1979). The Micromechanics of Impact Fracture of Rock. *Int. J. Rock Mech. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 16, págs. 293-302.
  - [50] GRADY, D. E. ; KIPP, M. E. (1980). Continuum Modelling of Explosive Fracture in Oil Shale. *Int. J. Rock Mech. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol 17, págs. 147-157.
  - [51] GRADY, D. E. ; KIPP, M. E. Dynamic Rock Fragmentation, en : *Fracture*

- Mechanics of Rock*. London : Academic Press.
- [52] GRADY, D. E.; KIPP, M. E. (1985). Geometric Statistics and Dynamic Fragmentation. *Journal of Applied Physics*, nº 58, págs. 1210-1222.
  - [53] GRADY, DENNIS E. Fragmentation Under Impulsive Stress Loading. Albuquerque : Sandia National Laboratories.
  - [54] GREEN, A. E. ; NAGHDI, P. M. (1965). A general theory of an elastic-plastic continuum. *Arch. Rational Mech. Anal.*, nº 18, págs. 251-281.
  - [55] GRIFFITH, A. A. (1920). The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society* (London), nº 221, págs. 163-198.
  - [56] HALLQUIST, JOHN O. (1983). *Theoretical Manual for DYNA3D*. Livermore : Lawrence Livermore Laboratory, Rept. UCID-19401.
  - [57] HALLQUIST, JOHN O. (1988). *User's Manual For DYNA2D -- An Explicit Two-dimensional Hydrodynamic Finite Element Code with Interactive Rezoning and Graphical Display*. Livermore : Lawrence Livermore National Laboratory, Rept. UCID-18756, Rev. 3.
  - [58] HALLQUIST, JOHN O. ; Whirley, Robert G. (1989). *DYNA3D User's Manual : Nonlinear Dynamic Analysis of Structures in Three Dimensions*. Livermore : Lawrence Livermore National Laboratory, Rept. UCID-19592, Rev. 5.
  - [59] HAUSDORFF , F. (1923). Momentprobleme für ein endliches Intervall. *Mathematische Zeitschrift*, nº 9, págs. 220-248.
  - [60] HORI, M.; NEMAT-NASSER, S. (1983). Overall Moduli of Solids with Microcracks. *J. Mech. Phys. Solids*, vol 31, págs. 155-171.
  - [61] HORI, M.; NEMAT-NASSER, S. (1988). Dynamic response of crystalline solids with microcavities. *Journal of Applied Physics*, nº 64, págs. 856-863.
  - [62] IRWIN, G. R. (1948). Fracture dynamics. *Fracturing of Metals*. Cleveland : American Society of Metals, págs. 147-166.
  - [63] JAUMANN, G. (1911). Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien*, nº 120, págs. 385-530.
  - [64] JAYNES, E. T. (1983). *Papers on Probability Statistics and Statistical Physics*. Edited by R. D. Rosenkrantz. Dordrecht (Holland) : D. Reidel Publishing Company.
  - [65] KACHANOV , MARK ; LAURES, J. P (1989). Three-dimensional problem of strongly interacting arbitrarily located penny-shaped cracks. *International Journal of Fracture*, vol. 41, pGA. 289-313.
  - [66] KACHANOV, M. (1987). Elastic Solids with many cracks : a simple method of analysis. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 23, nº 1, págs. 23-43.
  - [67] KACHANOV, M. (1987). On Modelling of Anisotropic Damage in Elastic Brittle Materials. A brief Review. *ASME Winter Meeting*. Boston.

- [68] KACHANOV, MARK (1980). Continuum Model of Medium with Cracks. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 106, N° EM5, págs. 1039-1051.
- [69] KAPUR, J. N. ; KESAVAN, H. K. (1992). *Entropy Optimization Principles with Applications*. Boston : Academic Press.
- [70] KIPP, M. E. ; GRADY, D. E. (1978). *Numerical Studies of Rock Fragmentation*. SAND79-1582. Albuquerque, NM : Sandia National Laboratories.
- [71] KOLMOGÓROV, A. N. ; FOMÍN, S. V. (1975). *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. Segunda edición. Moscú : Editorial Mir.
- [72] KORN, GRANINO A. ; KORN, THERESA M. (1961). *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers : Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. Second enlarged and revised edition. New York : McGHraw-Hill.
- [73] KOTOUL, M. ; BÍLEK, Z. (1988). On modelling of stress wave / fracture interaction in brittle bodies subjected to dynamic fracture. *International Journal of Fracture*, n° 41, págs. 207-221.
- [74] KRAUSZ, A. S. ; EYRING, H. (1975). *Deformation Kinetics*. New York : John Wiley and Sons.
- [75] KRIZEK, M. (1990). *Finite element approximation of variational problems and applications*. Essex : Longman Scientific and Technical.
- [76] KULATILAKE, S. W. ; WANG, S. ; STEPHANSSON, O. (1993). Effect of Finite Size Joints on the Deformability of Jointed Rock in Three Dimensions. *J. Rock Mech. Sci. & Geomech. Abstracts*, vol. 30, n° 5, págs. 479-501.
- [77] KUSZMAU, JOEL S. A New Constitutive Model for Fragmentation of Rock under Dynamic Loading. Albuquerque : Sandia National Laboratories. I
- [78] LAM, P. S. ; FREUND, L. B. (1985). Analysis of dynamic growth of a tensile crack in an elastic-plastic material. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 33, n° 2, págs. 153-167.
- [79] LIU, ZHONG ; MYER, LARRY R. ; COOK, NEVILLE G. W. (1993). Micromechanics of Granular Materials : Numerical Simulation of the Effects of Heterogeneities. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, n° 7, págs. 1281-1284.
- [80] MAKER, BRADLEY N. ; HALLQUIST, JOHN O. (1990). *NIKE3D : A Nonlinear, Implicit, Three-Dimensional Finite Element Code for Solid and Structural Mechanics User's Manual*. Livermore : Lawrence Livermore National Laboratory. UCRL-MA-105268.
- [81] MALVERN, L. E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium*. New Jersey : Prentice Hall.
- [82] MANDEL, J. (1973). Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques. *J. Solids Structures*, vol 9, págs. 725-740.
- [83] MARSDEN, JERROLD E. ; HUGHES, THOMAS J. (1983). *Mathematical*

- Foundations of Elasticity*. New Jersey : Prentice Hall.
- [84] MAUGIN, G. A. (1990). Internal Variables and Dissipative Structures. J. Non-Equilib. *Thermodyn*, vol. 15, nº 2, págs. 173-192.
  - [85] MAUGIN, GERARD A. (1992). *The thermomechanics of plasticity and fracture*. Cambridge : Cambridge University Press.
  - [86] MOTT , N. F.(1948). Brittle fracture in mild steel plates. *Engineering*, nº 165, págs. 16-18.
  - [87] MUDRY, F. y otros (1992). Development of Local Criteria in Steels. AMD, vol 137, *Advances in Fracture / Damage Models for the Analysis of Engineering Problems*, ASME, Págs. 305-318.
  - [88] MUKHERJEE, D. ; HURST, D. C. (1984). Maximum Entropy Revisited. *Statistica Neerlandica* 38, nº 1, págs. 1-12.
  - [89] MURA, T. (1987). *Micromechanics of defects in solids*. Dordrecht : Martinus Nijhoff Publications.
  - [90] NAGHDI, P. M. (1990). A critical Review of the State of Finite Plasticity. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, nº 41, págs. 315-394.
  - [91] NASTRAN : *User's Manual*. Los Angeles : The Mac-Neal-Schwendler Corporation.
  - [92] NEMAT-NASSER, S. (1982). On Finite Deformation Elasto-Plasticity. *Int. J. Solids Structures*, vol. 18, nº 10, págs. 857-872.
  - [93] NOLL, W. (1955). On the Continuity of the Solid and Fluids States. *J. Rat. Mech. Anal*, vol. 4, págs. 1955.
  - [94] ODEN, J. T. (1972). *Finite Elements of Nonlinear Continua*. New York : McGraw-Hill.
  - [95] ODEN, J. T. (1976). *An Introduction to Mathematical Theory of Finite Elements*. USA : John Wiley and Sons.
  - [96] ODEN, J. T. (1983). *Variational Methods in Theoretical Mechanics*. Berlin : Springer-Verlag.
  - [97] ONSAGER, L. ; MACHLUP, S. (1953). Fluctuations and irreversible processes. *Phys. Rev.*, nº 91, págs. 1505-1515.
  - [98] OWEN, D. J. R. ; HINTON, E. (1980). *Finite Elements in Plasticity : Theory and Practice*. Swansea : Pineridge Press.
  - [99] PARTON ,V. Z.; BORISOVSKY, V. G. (1989). *Dynamic Fracture Mechanics. Volume 1 : Stationary Cracks*. Revised Edition. New York : Hemisphere Publishing Corporation.
  - [100] PARTON, V. Z.; MOROZOV, E.M. (1989). *Mechanics of Elastic-Plastic Fracture*. Second Edition, Revised. Washington : Hemisphere Publishing Corporation.
  - [101] PERL, M. ; SHMUELY, M. ; BETSER, A. A. (1980). On the Dynamic Propagation of a Griffith Crack in a Finite Rectangular Plate. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 14, págs. 143-153.

- [102] PINSKY, PETER M.; ORTIZ, MIGUEL ; PISTER, KARL S. (1983). Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, nº 40, págs. 137-158.
- [103] PRESS, WILLIAM H., ET. AL. (1992). *Numerical Recipes in Fortran : The Art of Scientific Computing*. Second Edition. Cambridge : Cambridge University Press.
- [104] PRIGOGINE, I. (1974). *Introducción a la termodinámica de los procesos irreversibles*. 1ª ed. española. Madrid : Selecciones Científicas.
- [105] RAVI-CHANDAR, K. ; KNAUSS, W. G. (1984). An experimental investigation into dynamic fracture : I. Crack Initiation and arrest. *International Journal of Fracture*, nº 25, págs. 247-262.
- [106] RAVI-CHANDAR, K. ; KNAUSS, W. G. (1984). An experimental investigation into dynamic fracture : II. Microstructural aspects. *International Journal of Fracture*, nº 26, págs. 65-80.
- [107] RAVI-CHANDAR, K. ; KNAUSS, W. G. (1984). An experimental investigation into dynamic fracture : III. On steady state crack propagation and crack branching. *International Journal of Fracture*, nº 26, págs. 141-154.
- [108] RAVI-CHANDAR, K. ; KNAUSS, W. G. (1984). An experimental investigation into dynamic fracture : IV. On the interaction of stress waves with propagating cracks. *International Journal of Fracture*, nº 26, págs. 189-200.
- [109] RAVICHANDRAN, G. ; CLIFTON, R. J. (1989). Dynamic fracture under plane wave loading. *International Journal of Fracture*, nº 40, págs. 157-201.
- [110] RÍOS, SIXTO (1973). *Métodos estadísticos*. Sexta edición. Madrid : Ediciones del Castillo.
- [111] ROSAKIS, ARES J. ; ZEHNDER, ALAN T. (1985). On the dynamic fracture of structural metals. *International Journal of Fracture*, nº 27, págs. 169-186.
- [112] RUDIN, WALTER (1985). *Análisis real y complejo*. Madrid : Alhambra.
- [113] RUDIN, WALTER (1990). *Principios de Análisis Matemáticos*. España : McGraw-Hill.
- [114] SCHOUTEN, J. A. ; KULK, W. (1969). *Pfaff's Problem and its Generalizations*. Reprint. New York : Chelsea Publishing Company.
- [115] SEAMAN, L. ; CURRAN, D. R. ; SHOCKEY, D. A. (1976). Computational models for ductile and brittle fracture. *Journal of Applied Physics*, nº 47, págs. 4814-4826.
- [116] SEAMAN, L. ; CURRAN, D. R. ; CREWDSON, R. C. (1978). Transformation of observed crack traces on a section to true crack density for fracture calculations. *J. Appl. Phys.*, vol. 49, nº 10, págs. 5221-5229.
- [117] SHANNON, C. (1948). *Bell System Tech. J.* nº 27. Reimpreso en Shannon C. ; Weaver, W. (1949). *The Mathematical Theory of Communication*. Urbana : University of Illinois Press.

- [118] SHEN, B. ; STEPHANSSON, O. (1993). Numerical Analysis of Mixed Mode I and Mode II Fracture Propagation. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 861-867.
- [119] SHOHAT, J. A. ; TAMARKIN, J. D. (1943). *The Problem of Moments*. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society.
- [120] SHUKLA, A.; AGARWAL, R. K. ; NIGAM, H. (1988). Dynamic fracture studies on 7075-T6 aluminum and 4340 steel using strain gages and photoelastic coatings. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 31, nº 3, págs. 501-515.
- [121] SIH, G. C.; LIEBOWITZ, H. (1968). Fracture. An Advanced Treatise, vol. II. *Mathematical Theories of Brittle Fracture*. New York : Academic Press.
- [122] SIMO, J. C. (1988). A Framework for Finite Strain Elastoplasticity Based on Maximum Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition : Part I. Continuum Formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, nº 66, págs. 199-219.
- [123] SIMO, J. C. ; JU, J. W. (1987). Strain and Stress-Based Continuum Damage Models : I. Formulation. *Int. J. Solid Structures*, vol. 23, nº 7, págs. 821-840.
- [124] SIMO, J. C. ; ORTIZ, M. (1985). A Unified Approach to Finite Deformation Elastoplastic Analysis Based on the Use of Hyperelastic Constitutive Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, nº 49, págs. 221-245.
- [125] SIMO, J. C. ; PISTER, K. S. (1984). Remarks on Rate Constitutive Equations for Finite Deformation Problems : Computational Implications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, nº 46, págs. 201-215.
- [126] SNEDDON, I. N. (1961). *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*. London : Oliver and Boyd.
- [127] SNEDDON, I. N.; LOWENGRUB, M. (1969). *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*. New York : John Wiley & Sons.
- [128] SOKOLNIKOFF, S. (1979). *Análisis tensorial : Teoría y aplicaciones a la Geometría y Mecánica de los Medios Contínuos*. 2ª edición. Madrid : Editorial Index.
- [129] SOLANA, VICENTE ; ARTEAGA, ANGEL (1987). Second Order Uncertainty Modelling Over Finite and Infinite Domains using Entropy. University of Waterloo, Canada : Institute for Risk Research.
- [130] TAYLOR, LEE M. ; CHEN, ER-PING ; KUSZMAUL, JOEL S. (1986). Microcrack-induced damage accumulation in brittle rock under dynamic loading. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, nº 55, págs. 301-320.
- [131] TRUESDELL, C. (1955). The simplest rate theory of pure elasticity. *Comm. Pure Appl. Math.*, nº 8, págs. 123-132.
- [132] TRUESDELL, C. (1969). *Rational Thermodynamics*. New York : McGraw-Hill.

- [133] TRUESDELL, C. (1973). *Termodinámica racional : Cursos de conferencias acerca de temas seleccionados*. Barcelona : Editorial Reverté.
- [134] TULER, F. R.; BUTCHER, B. M. (1968). A criterion for the time dependence of dynamic fracture. *International Journal of Fracture*, nº 4, págs 431-437.
- [135] VON MISES, RICHARD (1964). *Mathematical Theory of Probability and Statistics*. New York : Academic Press.
- [136] VOROBIEV, YU V. (1965). *Method of Moments in Applied Mathematics*. New York : Gordon and Breach Science Publishers.
- [137] WANG, R. ; KEMENY, J. M. (1993). Micromechanical Modeling of Tuffaceous Rock for Application in Nuclear Waste Storage. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 1351-1357.
- [138] WILKINS, M.L. (1977). *Fracture Studies with Two and Three Dimensional Computer Simulation Programs*. Livermore : Lawrence Livermore National Laboratory.
- [139] YONGHONG ZHAO ; JIEFAN HUANG ; REN WANG (1993). Fractal Characteristics of Mesofractures in Compressed Rock Specimens. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 877-882.
- [140] YUAN, Y. G. ; LAJTAI, E. Z. ; AYARI, M. L. (1993). Fracture Nucleation from a Compression-parallel, Finite-width Elliptical Flaw. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 873-876.
- [141] ZEHNDER, ALAN T. ; ROSAKIS, ARES J. (1990). Dynamic fracture initiation and propagation in 4340 steel under impact loading. *International Journal of Fracture*, nº 43, págs. 271-285.
- [142] ZIENKIEWICZ, O. C. (1980). *El método de los elementos finitos*. Barcelona : Editorial Reverté.



## **9. BIBLIOGRAFÍA**

- 
- [1] ABAQUS. USA : Hibbitt, Karlsson and Sorensen.
  - [2] ABRAHAM, RALPH ; MARSDEN, JERROLD E. ; TUDORS, RATIU (1988). *Manifolds, tensor analysis and applications*. Second Edition. New York : Sringer-Verlag.
  - [3] ABRAHAM, RALPH ; MARSDEN, JERROLD E. (1978). *Foundations of Mechanics*. 2nd ed. Massachusetts : Benjamin Cummings.
  - [4] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions*. Washington : National Bureau of Standards.
  - [5] ADINA- A Finite Element Program for Automatic Dynamic Incremental nonlinear analysis. BATHE, J. K. Report 82448-1, Acoustics and Vibration Lab., Dept. Mech. Eng., M.I.T. (September 1975, rev. December 1978).
  - [6] AHEIZER, N. I. ; KREIN, M. (1962). *Some questions in the Theory of Moments*. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society.
  - [7] ANSYS *Theoretical Manual*. USA : Swanson Analysis Systems.
  - [8] APOSTOL, TOM M. (1989). *Calculus*, vol. II. 2ª ed. Madrid : Reverté.
  - [9] BATAILLE, J. ; KESTIN, J. (1979). Irreversible Processes and Physical Interpretation of Rational Thermodynamics. *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, vol. 4, nº 4, págs. 229-258.
  - [10] BATHE, K. J. (1985). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. New Jersey : Prentice Hall.
  - [11] BEREMIN, F. M. (1983). A Local Criterion for Cleavage Fracture of a Nuclear Pressure Vessel Steel. *Metallurgical Transactions A*, vol 14A, págs. 2277-2287.
  - [12] BERRY, J. P. (1960). Some kinetic considerations of the Griffith criterion for fracture. I. Equations of motion at constant force. *Journal of the Mechanics and Physics Solids*, nº 8, págs. 194-206.
  - [13] BERRY, J. P. (1960). Some kinetic considerations of the Griffith criterion for fracture. II. Equations of motion at constant displacement. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, nº 8, págs. 207-216.
  - [14] BERTHAUD, Y. ; PIJAUDIER-CABOT, G. Non-local Continuum and Micromechanics of Damage in Quasi-Brittle Materials.
  - [15] BILEK, ZDENEK (1987). Dynamic Fracture Studies Overview. *Anales de Mecánica de la Fractura*. Comunicación presentada en el cuarto encuentro del Grupo español de Fractura, Braga (Portugal), 23-24 de Abril de 1987.
  - [16] BISHOP, R.L. ; GOLDBERG, S. I. (1980). *Tensor Analysis on Manifolds*. New York : Dover Publications Company.
  - [17] BRAND, H. R. *DIGLIB (Device Independent Graphics LIBrary)*. Livermore : Lawrence Livermore National Laboratory.
  - [18] BRAR, N. S. ; BLESS, S. J. ; ROSENBERG, Z. New Experimental

- Techniques to Study Damage Evolution in Brittle Materials.
- [19] BRIGNOLI, M. ; SARTORI, L. (1993). Incremental Constitutive Relations for the Study of Wellbore Failure. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 1319-1322.
  - [20] BROEK, DAVID (1989). *The Practical Use of Fracture Mechanics*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
  - [21] BUCK, BRIAN ; MACAULAY, VINCENT A. (1991). *Maximum Entropy in Action : A Collection of Expository Essays*. Oxford : Clarendon Press.
  - [22] BUDIANSKY, B. ; O'CONNELL, R. J. (1976). Elastic Modeling of a Cracked Solid. *Int. J. Sol. Struct.*, vol 12, págs. 81-97.
  - [23] CASIMIR, H. (1945). On Onsager's principle of microscopic reversibility. *Rev. Mod. Phys.*, nº 17, págs. 343-350.
  - [24] COLEMAN, B. D. ; GURTIN, M. E. (1967). Thermodynamics with Internal State Variables. *The Journal of Chemical Physics*, vol 47, nº 3, págs. 597-613.
  - [25] COSMOS. Santa Monica : Structural Research and Analysis Corporation.
  - [26] COSTIN, L. S. ; DUFFY, J. ; FREUND, L. B. (1977). Fracture initiation in metals under stress wave loading conditions. En, *Fast fracture and Crack Arrest*. Special Technical Publication 627. Philadelphia : American Society for Testing and Materials, págs. 301-318.
  - [27] COWIN, C. (1985). The Relationship Between the Elasticity Tensor and the Fabric Tensor. *Mechanics of Materials*, nº 4, págs. 137-147.
  - [28] CURRAN, D. R.; SEAMAN, L.; SHOCKEY, D. A. (1987). Dynamic Failure of Solids. *Physics Reports*, vol. 147, nº 5-6, págs. 253-388.
  - [29] CHABOCHE, J. L. (1986). Continuum Damage Mechanics : Present State and Future Trends. Séminaire International sur l'Approche Locale de la Rupture. Documents de conférence. Moret-sur-Loing (France) : Centre de Recherches EDF " Les Renardières".
  - [30] CHENG, H. ; DUSSEAU, M. B. (1993). Deformation and Diffusion Behaviour in a Solid Experiencing Damage : a Continuous Damage Model and Its Numerical Implementation. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 1323-1331.
  - [31] CHEREPANOV, G. P. (1979). *Mechanics of Brittle Fracture*. New York : McGraw-Hill.
  - [32] CHUDNOVSKY, A. ; DOLGOPOLSKY, A. ; KACHANOV, M. (1987). Elastic Interaction of a Crack a Microcrack Array. I. Formulation of the problem and general form of the solution. *Int. J. Solids Structures*, vol. 23 nº 1, págs. 1-10.
  - [33] DAFALIAS, Y. F. (1983). Corotational Rates for Kinematic Hardening at Large Plastic Deformations. *Journal of Applied Mechanics*, vol 50, págs. 561-565.
  - [34] DAVISON, L.; GRAHAN, R. A. (1979). *Shock Compression of Solids*.

- Physics Reports* , vol. 55, pág. 255-379.
- [35] DOWSON, D. C. ; WRAGG, A. (1973). Maximum-Entropy Distributions Having Prescribed First and Second Moments. *IEEE Transactions on Information Theory*, págs. 689-693.
  - [36] DULANEY, E. N. ; BRACE, W. F. (1960). Velocity behavior of a growing crack. *Journal of Applied Physics*, nº 31, págs. 2233-2236.
  - [37] DYSKIN, A. V. ; GERMANOVICH, L. N. (1993). A Model of Crack Growth in Microcracked Rock. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 813-820.
  - [38] ENGLEMAN, L. B. (1991). *NIKE-2D, a Nonlinear, Implicit, Two-Dimensional Finite Element Code for Solid Mechanics. User Manual*. Lawrence Livermore National Library, Rept. UCLR-MA-105413.
  - [39] FLANAGAN, D. P. ; TAYLOR, L. M. (1987). An Accurate Numerical Algorithm for Stress Integration with Finite rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, nº 62, págs. 305-320.
  - [40] FOURNEY, W. L. ; ET. AL. Fragmentation Studies in Jointed Brittle Material. Maryland : University of Maryland.
  - [41] FREUND, L. B. (1990). *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge : Cambridge University Press.
  - [42] FUNG, Y. C. (1965). *Foundations of Solid Mechanics*. ENGLEWOOD CLIFFS : PRENTICE-HALL.
  - [43] GERMAIN, P. (1973). *Cours de Mécanique des Milieux Continus. Tome I : Théorie Générale*. Paris : Masson et Cie Editeurs.
  - [44] GERMAIN, P. ; MULLER P. (1980). *Introduction a la mécanique des milieux continus*. Paris : Masson.
  - [45] GERMAIN, P. ; NGUYEN; Q. S. ; SUQUET, P. (1983). Continuum Thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, págs. 1010-1020.
  - [46] GOODMAN, J. (1985). Structural Fragility and Principle of Maximun Entropy. *Structural Safety*, nº 3, págs. 37-46.
  - [47] GOODS, S. H. ; BROWN, L. M. (1979). *Acta Metall.* , nº 27, pág. 1.
  - [48] GRADY, D. E. (1984). The Mechanics of Fracture under High-rate Stress Loading. *Proc. William Prager Symp. Mech. Geomaterials : Rocks, Concrete, Soils, Int. Union Theoretical and Applied Mechanics*, Northwestern University, Evanston, Il., 11-18 septiembre 1984.
  - [49] GRADY, D. E. ; KIPP, M. E. (1979). The Micromechanics of Impact Fracture of Rock. *Int. J. Rock Mech. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 16, págs. 293-302.
  - [50] GRADY, D. E. ; KIPP, M. E. (1980). Continuum Modelling of Explosive Fracture in Oil Shale. *Int. J. Rock Mech. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol 17, págs. 147-157.
  - [51] GRADY, D. E. ; KIPP, M. E. Dynamic Rock Fragmentation, en : *Fracture*

- Mechanics of Rock*. London : Academic Press.
- [52] GRADY, D. E.; KIPP, M. E. (1985). Geometric Statistics and Dynamic Fragmentation. *Journal of Applied Physics*, nº 58, págs. 1210-1222.
  - [53] GRADY, DENNIS E. Fragmentation Under Impulsive Stress Loading. Albuquerque : Sandia National Laboratories.
  - [54] GREEN, A. E. ; NAGHDI, P. M. (1965). A general theory of an elastic-plastic continuum. *Arch. Rational Mech. Anal.*, nº 18, págs. 251-281.
  - [55] GRIFFITH, A. A. (1920). The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society* (London), nº 221, págs. 163-198.
  - [56] HALLQUIST, JOHN O. (1983). *Theoretical Manual for DYNA3D*. Livermore : Lawrence Livermore Laboratory, Rept. UCID-19401.
  - [57] HALLQUIST, JOHN O. (1988). *User's Manual For DYNA2D -- An Explicit Two-dimensional Hydrodynamic Finite Element Code with Interactive Rezoning and Graphical Display*. Livermore : Lawrence Livermore National Laboratory, Rept. UCID-18756, Rev. 3.
  - [58] HALLQUIST, JOHN O. ; Whirley, Robert G. (1989). *DYNA3D User's Manual : Nonlinear Dynamic Analysis of Structures in Three Dimensions*. Livermore : Lawrence Livermore National Laboratory, Rept. UCID-19592, Rev. 5.
  - [59] HAUSDORFF , F. (1923). Momentprobleme für ein endliches Intervall. *Mathematische Zeitschrift*, nº 9, págs. 220-248.
  - [60] HORI, M.; NEMAT-NASSER, S. (1983). Overall Moduli of Solids with Microcracks. *J. Mech. Phys.Solids*, vol 31, págs. 155-171.
  - [61] HORI, M.; NEMAT-NASSER, S. (1988). Dynamic response of crystalline solids with microcavities. *Journal of Applied Physics*, nº 64, págs. 856-863.
  - [62] IRWIN, G. R. (1948). Fracture dynamics. *Fracturing of Metals*. Cleveland : American Society of Metals, págs. 147-166.
  - [63] JAUMANN, G. (1911). Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien*, nº 120, págs. 385-530.
  - [64] JAYNES, E. T. (1983). *Papers on Probability Statistics and Statistical Physics*. Edited by R. D. Rosenkrantz. Dordrecht (Holland) : D. Reidel Publishing Company.
  - [65] KACHANOV , MARK ; LAURES, J. P (1989). Three-dimensional problem of strongly interacting arbitrarily located penny-shaped cracks. *International Journal of Fracture*, vol. 41, pGA. 289-313.
  - [66] KACHANOV, M. (1987). Elastic Solids with many cracks : a simple method of analysis. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 23, nº 1, págs. 23-43.
  - [67] KACHANOV, M. (1987). On Modelling of Anisotropic Damage in Elastic Brittle Materials. A brief Review. *ASME Winter Meeting*. Boston.

- [68] KACHANOV, MARK (1980). Continuum Model of Medium with Cracks. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 106, Nº EM5, págs. 1039-1051.
- [69] KAPUR, J. N. ; KESAVAN, H. K. (1992). *Entropy Optimization Principles with Applications*. Boston : Academic Press.
- [70] KIPP, M. E. ; GRADY, D. E. (1978). *Numerical Studies of Rock Fragmentation*. SAND79-1582. Albuquerque, NM : Sandia National Laboratories.
- [71] KOLMOGÓROV, A. N. ; FOMÍN, S. V. (1975). *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. Segunda edición. Moscú : Editorial Mir.
- [72] KORN, GRANINO A. ; KORN, THERESA M. (1961). *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers : Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. Second enlarged and revised edition. New York : McGHraw-Hill.
- [73] KOTOUL, M. ; BÍLEK, Z. (1988). On modelling of stress wave / fracture interaction in brittle bodies subjected to dynamic fracture. *International Journal of Fracture*, nº 41, págs. 207-221.
- [74] KRAUSZ, A. S. ; EYRING, H. (1975). *Deformation Kinetics*. New York : John Wiley and Sons.
- [75] KRIZEK, M. (1990). *Finite element approximation of variational problems and applications*. Essex : Longman Scientific and Technical.
- [76] KULATILAKE, S. W. ; WANG, S. ; STEPHANSSON, O. (1993). Effect of Finite Size Joints on the Deformability of Jointed Rock in Three Dimensions. *J. Rock Mech. Sci. & Geomech. Abstracts*, vol. 30, nº 5, págs. 479-501.
- [77] KUSZMAU, JOEL S. A New Constitutive Model for Fragmentation of Rock under Dynamic Loading. Albuquerque : Sandia National Laboratories. I
- [78] LAM, P. S. ; FREUND, L. B. (1985). Analysis of dynamic growth of a tensile crack in an elastic-plastic material. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 33, nº 2, págs. 153-167.
- [79] LIU, ZHONG ; MYER, LARRY R. ; COOK, NEVILLE G. W. (1993). Micromechanics of Granular Materials : Numerical Simulation of the Effects of Heterogeneities. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 1281-1284.
- [80] MAKER, BRADLEY N. ; HALLQUIST, JOHN O. (1990). *NIKE3D : A Nonlinear, Implicit, Three-Dimensional Finite Element Code for Solid and Structural Mechanics User's Manual*. Livermore : Lawrence Livermore National Laboratory. UCRL-MA-105268.
- [81] MALVERN, L. E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium*. New Jersey : Prentice Hall.
- [82] MANDEL, J. (1973). Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques. *J. Solids Structures*, vol 9, págs. 725-740.
- [83] MARSDEN, JERROLD E. ; HUGHES, THOMAS J. (1983). *Mathematical*

- Foundations of Elasticity*. New Jersey : Prentice Hall.
- [84] MAUGIN, G. A. (1990). Internal Variables and Dissipative Structures. J. Non-Equilib. *Thermodyn*, vol. 15, nº 2, págs. 173-192.
  - [85] MAUGIN, GERARD A. (1992). *The thermomechanics of plasticity and fracture*. Cambridge : Cambridge University Press.
  - [86] MOTT , N. F.(1948). Brittle fracture in mild steel plates. *Engineering*, nº 165, págs. 16-18.
  - [87] MUDRY, F. y otros (1992). Development of Local Criteria in Steels. AMD, vol 137, *Advances in Fracture / Damage Models for the Analysis of Engineering Problems*, ASME, Págs. 305-318.
  - [88] MUKHERJEE, D. ; HURST, D. C. (1984). Maximum Entropy Revisited. *Statistica Neerlandica* 38, nº 1, págs. 1-12.
  - [89] MURA, T. (1987). *Micromechanics of defects in solids*. Dordrecht : Martinus Nijhoff Publications.
  - [90] NAGHDI, P. M. (1990). A critical Review of the State of Finite Plasticity. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, nº 41, págs. 315-394.
  - [91] NASTRAN : *User's Manual*. Los Angeles : The Mac-Neal-Schwendler Corporation.
  - [92] NEMAT-NASSER, S. (1982). On Finite Deformation Elasto-Plasticity. *Int. J. Solids Structures*, vol. 18, nº 10, págs. 857-872.
  - [93] NOLL, W. (1955). On the Continuity of the Solid and Fluids States. *J. Rat. Mech. Anal*, vol. 4, págs. 1955.
  - [94] ODEN, J. T. (1972). *Finite Elements of Nonlinear Continua*. New York : McGraw-Hill.
  - [95] ODEN, J. T. (1976). *An Introduction to Mathematical Theory of Finite Elements*. USA : John Wiley and Sons.
  - [96] ODEN, J. T. (1983). *Variational Methods in Theoretical Mechanics*. Berlin : Springer-Verlag.
  - [97] ONSAGER, L. ; MACHLUP, S. (1953). Fluctuations and irreversible processes. *Phys. Rev.*, nº 91, págs. 1505-1515.
  - [98] OWEN, D. J. R. ; HINTON, E. (1980). *Finite Elements in Plasticity : Theory and Practice*. Swansea : Pineridge Press.
  - [99] PARTON ,V. Z.; BORISOVSKY, V. G. (1989). *Dynamic Fracture Mechanics. Volume 1 : Stationary Cracks*. Revised Edition. New York : Hemisphere Publishing Corporation.
  - [100] PARTON, V. Z.; MOROZOV, E.M. (1989). *Mechanics of Elastic-Plastic Fracture*. Second Edition, Revised. Washington : Hemisphere Publishing Corporation.
  - [101] PERL, M. ; SHMUELY, M. ; BETSER, A. A. (1980). On the Dynamic Propagation of a Griffith Crack in a Finite Rectangular Plate. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 14, págs. 143-153.

- [102] PINSKY, PETER M.; ORTIZ, MIGUEL ; PISTER, KARL S. (1983). Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, nº 40, págs. 137-158.
- [103] PRESS, WILLIAM H., ET. AL. (1992). *Numerical Recipes in Fortran : The Art of Scientific Computing*. Second Edition. Cambridge : Cambridge University Press.
- [104] PRIGOGINE, I. (1974). *Introducción a la termodinámica de los procesos irreversibles*. 1ª ed. española. Madrid : Selecciones Científicas.
- [105] RAVI-CHANDAR, K. ; KNAUSS, W. G. (1984). An experimental investigation into dynamic fracture : I. Crack Initiation and arrest. *International Journal of Fracture*, nº 25, págs. 247-262.
- [106] RAVI-CHANDAR, K. ; KNAUSS, W. G. (1984). An experimental investigation into dynamic fracture : II. Microstructural aspects. *International Journal of Fracture*, nº 26, págs. 65-80.
- [107] RAVI-CHANDAR, K. ; KNAUSS, W. G. (1984). An experimental investigation into dynamic fracture : III. On steady state crack propagation and crack branching. *International Journal of Fracture*, nº 26, págs. 141-154.
- [108] RAVI-CHANDAR, K. ; KNAUSS, W. G. (1984). An experimental investigation into dynamic fracture : IV. On the interaction of stress waves with propagating cracks. *International Journal of Fracture*, nº 26, págs. 189-200.
- [109] RAVICHANDRAN, G. ; CLIFTON, R. J. (1989). Dynamic fracture under plane wave loading. *International Journal of Fracture*, nº 40, págs. 157-201.
- [110] RÍOS, SIXTO (1973). *Métodos estadísticos*. Sexta edición. Madrid : Ediciones del Castillo.
- [111] ROSAKIS, ARES J. ; ZEHNDER, ALAN T. (1985). On the dynamic fracture of structural metals. *International Journal of Fracture*, nº 27, págs. 169-186.
- [112] RUDIN, WALTER (1985). *Análisis real y complejo*. Madrid : Alhambra.
- [113] RUDIN, WALTER (1990). *Principios de Análisis Matemáticos*. España : McGraw-Hill.
- [114] SCHOUTEN, J. A. ; KULK, W. (1969). *Pfaff's Problem and its Generalizations*. Reprint. New York : Chelsea Publishing Company.
- [115] SEAMAN, L. ; CURRAN, D. R. ; SHOCKEY, D. A. (1976). Computational models for ductile and brittle fracture. *Journal of Applied Physics*, nº 47, págs. 4814-4826.
- [116] SEAMAN, L. ; CURRAN, D. R. ; CREWDSON, R. C. (1978). Transformation of observed crack traces on a section to true crack density for fracture calculations. *J. Appl. Phys.*, vol. 49, nº 10, págs. 5221-5229.
- [117] SHANNON, C. (1948). *Bell System Tech. J.* nº 27. Reimpreso en Shannon C. ; Weaver, W. (1949). *The Mathematical Theory of Communication*. Urbana : University of Illinois Press.



- [118] SHEN, B. ; STEPHANSSON, O. (1993). Numerical Analysis of Mixed Mode I and Mode II Fracture Propagation. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 861-867.
- [119] SHOHAT, J. A. ; TAMARKIN, J. D. (1943). *The Problem of Moments*. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society.
- [120] SHUKLA, A.; AGARWAL, R. K. ; NIGAM, H. (1988). Dynamic fracture studies on 7075-T6 aluminum and 4340 steel using strain gages and photoelastic coatings. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 31, nº 3, págs. 501-515.
- [121] SIH, G. C.; LIEBOWITZ, H. (1968). Fracture. An Advanced Treatise, vol. II. *Mathematical Theories of Brittle Fracture*. New York : Academic Press.
- [122] SIMO, J. C. (1988). A Framework for Finite Strain Elastoplasticity Based on Maximum Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition : Part I. Continuum Formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, nº 66, págs. 199-219.
- [123] SIMO, J. C. ; JU, J. W. (1987). Strain and Stress-Based Continuum Damage Models : I. Formulation. *Int. J. Solid Structures*, vol. 23, nº 7, págs. 821-840.
- [124] SIMO, J. C. ; ORTIZ, M. (1985). A Unified Approach to Finite Deformation Elastoplastic Analysis Based on the Use of Hyperelastic Constitutive Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, nº 49, págs. 221-245.
- [125] SIMO, J. C. ; PISTER, K. S. (1984). Remarks on Rate Constitutive Equations for Finite Deformation Problems : Computational Implications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, nº 46, págs. 201-215.
- [126] SNEDDON, I. N. (1961). *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*. London : Oliver and Boyd.
- [127] SNEDDON, I. N.; LOWENGRUB, M. (1969). *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*. New York : John Wiley & Sons.
- [128] SOKOLNIKOFF, S. (1979). *Análisis tensorial : Teoría y aplicaciones a la Geometría y Mecánica de los Medios Contínuos*. 2ª edición. Madrid : Editorial Index.
- [129] SOLANA, VICENTE ; ARTEAGA, ANGEL (1987). Second Order Uncertainty Modelling Over Finite and Infinite Domains using Entropy. University of Waterloo, Canada : Institute for Risk Research.
- [130] TAYLOR, LEE M. ; CHEN, ER-PING ; KUSZMAUL, JOEL S. (1986). Microcrack-induced damage accumulation in brittle rock under dynamic loading. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, nº 55, págs. 301-320.
- [131] TRUESDELL, C. (1955). The simplest rate theory of pure elasticity. *Comm. Pure Appl. Math.*, nº 8, págs. 123-132.
- [132] TRUESDELL, C. (1969). *Rational Thermodynamics*. New York : McGraw-Hill.

- [133] TRUESDELL, C. (1973). *Termodinámica racional : Cursos de conferencias acerca de temas seleccionados*. Barcelona : Editorial Reverté.
- [134] TULER, F. R.; BUTCHER, B. M. (1968). A criterion for the time dependence of dynamic fracture. *International Journal of Fracture*, nº 4, págs 431-437.
- [135] VON MISES, RICHARD (1964). *Mathematical Theory of Probability and Statistics*. New York : Academic Press.
- [136] VOROBYEV, YU V. (1965). *Method of Moments in Applied Mathematics*. New York : Gordon and Breach Science Publishers.
- [137] WANG, R. ; KEMENY, J. M. (1993). Micromechanical Modeling of Tuffaceous Rock for Application in Nuclear Waste Storage. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 1351-1357.
- [138] WILKINS, M.L. (1977). *Fracture Studies with Two and Three Dimensional Computer Simulation Programs*. Livermore : Lawrence Livermore National Laboratory.
- [139] YONGHONG ZHAO ; JIEFAN HUANG ; REN WANG (1993). Fractal Characteristics of Mesofractures in Compressed Rock Specimens. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 877-882.
- [140] YUAN, Y. G. ; LAJTAI, E. Z. ; AYARI, M. L. (1993). Fracture Nucleation from a Compression-parallel, Finite-width Elliptical Flaw. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 30, nº 7, págs. 873-876.
- [141] ZEHNDER, ALAN T. ; ROSAKIS, ARES J. (1990). Dynamic fracture initiation and propagation in 4340 steel under impact loading. *International Journal of Fracture*, nº 43, págs. 271-285.
- [142] ZIENKIEWICZ, O. C. (1980). *El método de los elementos finitos*. Barcelona : Editorial Reverté.